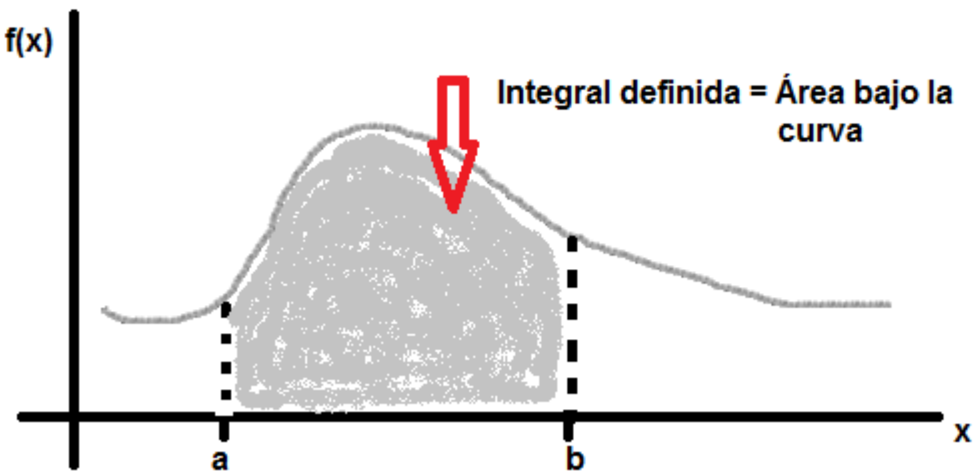
Integración Definida

En este tema analizaremos las propiedades que tienen las integrales definidas, si bien es cierto el concepto de integral está íntimamente relacionado con el área de una curva, puesto que al tener una integral definida en cierto intervalo se delimitan los límites de integración y esto da como resultado el cálculo de un área en un intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura.



Algunas fórmulas de la integral definida son:

Fórmula 1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es una constante.

Ejemplo 1: Obtén la integral de la función constante $f(x) = 8$, cuando x está en el intervalo $[5,9]$.

$$\int_5^9 f(x)dx = \int_5^9 8dx = 8(9-5) = 8(4) = 32$$

Fórmula 2. Si f es integrable en $[a, b]$ y c es un número real arbitrario, entonces cf es integrable en $[a, b]$

$$\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 2: Encuentra la integral de $\int_{-1}^{4} 3x^4\,dx$

$$\int_{-1}^{4} 3x^4\,dx = \frac{3x^5}{5}\Big|_{-1}^{4} = 615$$

Fórmula 3. Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ y $f-g$ son integrables en $[a,b]$, se tiene

a) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

b) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Ejemplo 3: Calcula la integral de suma y resta de las siguientes funciones $f(x) = x^4 + 8x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, respectivamente, en el intervalo $[1,6]$.

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{6}} f(x)+g(x)dx = \int_1^6 \left(x^4 + 8x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)dx = \int_1^6 \left(x^4 + \frac{17}{2}x^2\right)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{17}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^6 = \frac{12985}{6}$$

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{6}} f(x)-g(x)dx = \int_1^6 \left(x^4 + 8x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \int_1^6 \left(x^4 + \frac{15}{2}x^2\right)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{15}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^6 = \frac{4185}{2}$$

Fórmula 4. Si $a < c < b$ y f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Integración Definida

Ejemplo 4: Sabiendo que $a = 5 < 7 < b = 9$ calcula la integral mediante la fórmula 4 y 5 para encontrar la integral de $\int_a^b \frac{2}{3} x^{5/2} dx$.

$$\int_5^9 \frac{2}{3} x^{5/2} dx = \int_5^7 \frac{2}{3} x^{5/2} dx + \int_7^9 \frac{2}{3} x^{5/2} dx$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_5^7 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_7^9 = 119.6160 + 243.7156 = 363.3317$$

Fórmula 5. Si f es una función integrable en un intervalo cerrado y a, b, c son tres números del intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Fórmula 6. Si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Ejemplo 5: Sea $f(x) = (4x^5 + 6)$, encuentre $\int_0^4 f(x)dx$ verifica además que $f(x) \geq 0$ para todo x en $[0,4]$.

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (4x^5 + 6)dx = \frac{4x^6}{6} + 6x \Big|_0^4 = \frac{33776}{21}$$

Verificando que la función sea positiva en el intervalo, se tiene:

x	$f(x) \ = (4x^5 + 6),$
0	$f(0) = 4(0)^5 + 6 = 6$
1	$f(1) = 4(1)^5 + 6 = 10$
2	$f(2) = 4(2)^5 + 6 = 134$
3	$f(3) = 4(3)^5 + 6 = 978$
4	$f(4) = 4(4)^5 + 6 = 4102$

Fórmula 7. Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ parta todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo 6: Comprueba que $\int_1^2 (3x^2 + 4)dx \geq \int_1^2 (2x^2 + 5)dx$

$$\int_1^2 (3x^2 + 4)dx = \frac{3x^3}{3} + 4x \Big|_1^2 = \ x^3 + 4x \Big|_1^2 = 11$$

$$\int_1^2 (2x^2 + 5)dx = \frac{2x^3}{3} + 5x \Big|_1^2 = \frac{29}{3}$$

Por lo que se verifica que:

$$\int_{1}^{2}(3x^2+4)dx \geq \int_{1}^{2}(2x^2+5)dx$$

$$11 \geq \frac{29}{3}$$

$$11 \geq 9.6666$$

A continuación se presenta el **teorema fundamental del cálculo**:

Sea f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$

Parte 1. Si la función G está definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo x en $[a,b]$, entonces G es una antiderivada de f en $[a,b]$.

Parte 2. Si F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Si f es continua en $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 05 de septiembre de 2014, Integración definida, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.