Integración Indefinida

La integral indefinida $\int f(x)\, dx$ de f se define como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde F es una antiderivada de f y C es la constante de integración (arbitraria).

Es conveniente hacer notar que al proceso de antiderivada se le conoce más comúnmente como *integral indefinida*, la constante C es la constante de integración, a $f(x)$ se le llama integrando y a x la variable de integración.

A continuación tenemos las reglas principales para la integración indefinida.

Regla 1. Potencia para integrales indefinidas:

Si r es un número real y $r \neq -1$, entonces

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Ejemplo 1: Encuentre la integral de la función x^2

Se tienen que encontrar la integral de la función considerando que se le debe sumar una constante arbitraria: $\int x^2\, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

Regla 2.

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)dx$$

Donde c es una constante

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Regla 3. Potencia para funciones:

$$\int [g(x)]^r \, g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Con $r \neq -1$.

Regla 3. Potencia para funciones (versión alternativa):

Sea $u = g(x)$, donde g es una función derivable. Si r es un número racional y $r \neq -1$, entonces:

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C$$

Ejemplo 2: Encuentra la integral de la función $\int 12x^2(4x^3+2)^6 \, dx$

Veamos que el integrando contiene una función que está elevada a una potencia $(4x^3+2)^6$, esta potencia se suele sustituir por la u, teniendo:

$$u = (4x^3+2)^6$$

$$du = 12x^2$$

Por lo que observamos que el integrando está completo, es decir que se encuentra la derivada de la función por lo que simplemente se aplica la fórmula de la potencia para funciones.

$$\int 12x^2(4x^3+2)^6 \, dx = \int u^r du$$

$$\int 12x^2(4x^3+2)^6\,dx = \frac{(4x^3+2)^{6+1}}{6+1} + C = \frac{(4x^3+2)^7}{7} + C$$

Donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 3: Resuelve la siguiente integral $\int\left(9x\,\sqrt[3]{3x^3-12}\right)dx$

En este caso el integrando contiene una raíz cúbica, lo primero que se tiene que hacer es cambiar el símbolo de la raíz, por un exponente fraccionario, entonces la integral quedará escrita de esta forma:

$$\int\left(9x^2\,\sqrt[3]{3x^3-12}\right)dx = \int 9x^2\,(3x^3-12)^{1/3}\,dx$$

Ahora procedemos a renombrar a la variable u, como $u = 3x^3 - 12$ y si de nueva cuenta se revisa el integrando se tiene que la derivada de la función $u = 3x^3 - 12$ es $9x^2$ que ya está incluida por lo que sólo basta aplicar la fórmula de la integral de la potencia para funciones.

$$\int 9x^2\,(3x^3-12)^{1/3}\,dx = \int u^r du$$

$$\int 9x^2\,(3x^3-12)^{1/3}\,dx = \frac{(3x^3-12)^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{(3x^3-12)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{3(3x^3-12)^{4/3}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{(3x^3-12)^4}}{4} + C$$

Integración Indefinida

A continuación se presentan las principales fórmulas de integración, para una mayor consulta:

$\int u^n\ du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$, con $n \neq -1$	$\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int e^u\ du = e^u + C$	$\int a^u\ du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$
$\int sen\, u\ du = -\cos u + C$	$\int \cos u\, du = sen\, u + C$
$\int \tan u\ \ du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$	$\int \cot u\ \ du = \ln\lvert sen\ u\rvert + C$
$\int sec\ \ u\, du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	$\int \csc u\, du = \ln\lvert\csc u - cot\ \ u\rvert + C$
$\int \sec u \tan u\ \ du = \sec u + C$	$\int \csc u \cot u\ \ du = -\csc u + C$
$\int sec^2\ u\ \ du = \tan u + C$	$\int csc^2 u\, du = -\cot u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\ du = sen^{-1}\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = senh^{-1}\frac{u}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\ du = \frac{1}{a} tan^{-1}\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{a} tanh^{-1}\frac{u}{a} + C$
$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} sec^{-1}\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{1}{a} sech^{-1}\frac{\lvert u\rvert}{a} + C$

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 05 de septiembre de 2014, Integración indefinida, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.