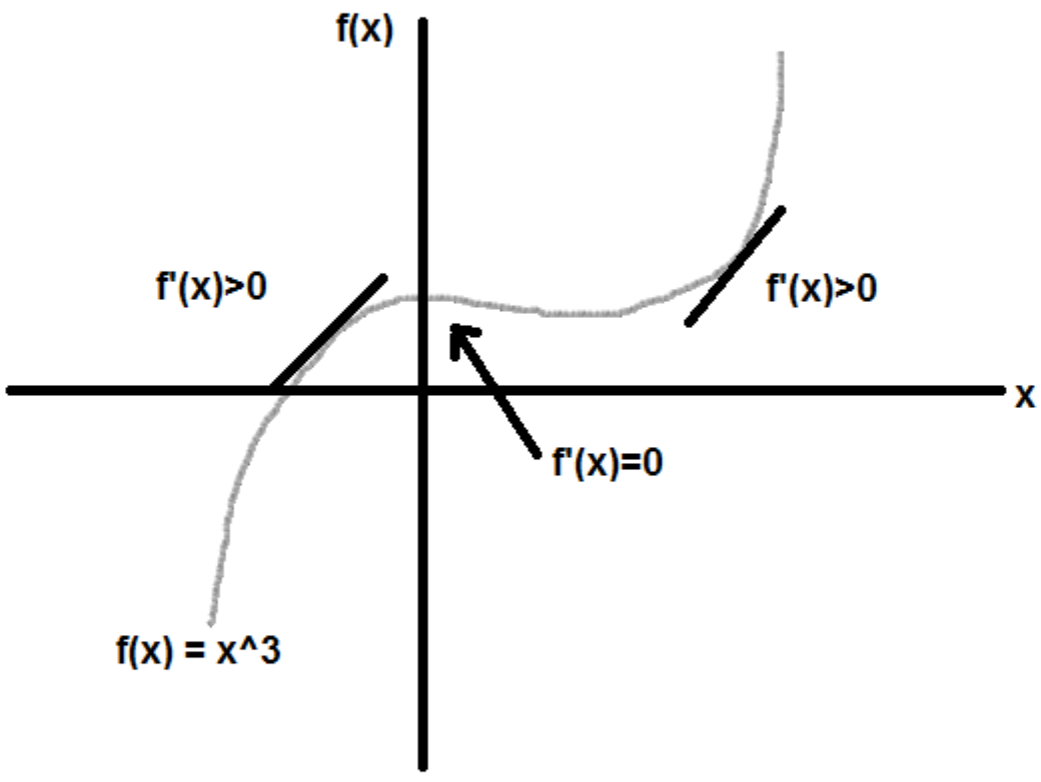
Puntos Críticos

Para encontrar los puntos críticos (máximos o mínimos) es conveniente mencionar la regla para los extremos relativos, esto es:

Si f tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0)$ no está definida.

Los extremos relativos pueden ocurrir en puntos de la gráfica de f donde $f'(x_0) = 0$ o f' no esté definida; a estos se les conoce como valor crítico de f, y a sus coordenadas $(x_0, f(x_0))$ como puntos críticos. Por lo que en un punto crítico puede darse un máximo, un mínimo o ninguno de ellos.

Cabe mencionar que no todo valor crítico corresponde a un extremo relativo, pues considerando el ejemplo de $f(x) = x^3$ veamos lo que ocurre:



Puntos Críticos

Consideremos la prueba de la primera derivada para encontrar extremos relativos:

1. Encontrar primero $f'(x)$

2. Determinar todos los valores de x en donde $f'(x) = 0$, o bien $f'(x)$ no esté definida.

3. En los intervalos encontrados en el paso 2 determinar si f es creciente $(f'(x) > 0)$ o decreciente $(f'(x) < 0)$

4. Para cada valor crítico x_0 en el que f sea continua, determinar si cambia de signo de $f(x)$ al aumentar x y pasar por x_0. Existe un máximo relativo cuando $x = x_0$ si $f'(x)$ cambia de $(+)$ a $(-)$ yendo de izquierda a derecha y un mínimo relativo si $f'(x)$, cambia de $(-)$ a $(+)$ yendo de izquierda a derecha. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no existen extremos relativos cuando $x = x_0$.

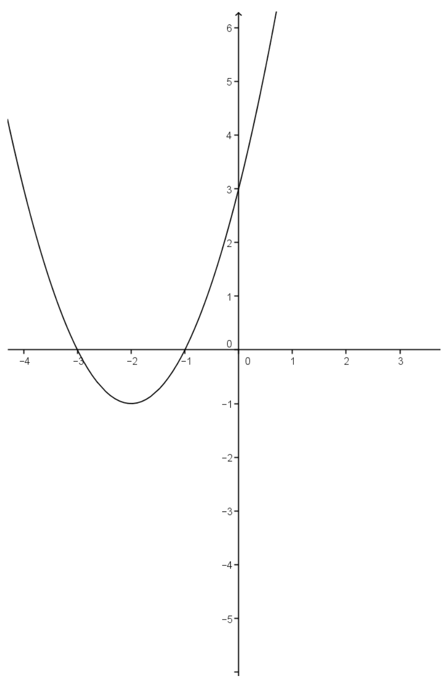
Ejemplo 1:

Encuentra los puntos donde ocurren los extremos relativos de la siguiente función $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Primero hay que encontrar la primera derivada de la función $f'(x) = 2x + 4$

Ahora igualando la primera derivada a cero se obtiene: $2x + 4 = 0$

$x = \frac{-4}{2} = -2$



Lo que se observa en la gráfica es que es el mínimo absoluto. Las intersecciones con los ejes son cuando $x^2 + 4x + 3 = 0$, esto se encuentra fácilmente factorizando el trinomio que da como resultado:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

$x + 1 = 0$ entonces $x = -1$

$x + 3 = 0$ entonces $x = -3$

De aquí se tienen cuatro intervalos

Intervalo	Signo de la derivada	Conclusión
$(-\infty, -3)$ o bien $x < -1$	$f'(x) = (-)$	f es decreciente
$(-3, -2)$ o bien $-3 < x < -2$	$f'(x) = (-)$	f es decreciente
$(-2, -1)$ o bien $-2 < x < -1$	$f'(x) = (+)$	f es creciente
$(-1, \infty)$ o bien $x > -1$	$f'(x) = (+)$	f es creciente

De aquí se concluye que ocurre un mínimo en $(-2, -1)$.

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 04 de junio de 2014, Puntos críticos, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.