Funciones Creciente y Decreciente

Para hablar del tema de funciones crecientes o decrecientes consideremos el caso del registro de un electrocardiograma donde se registra la actividad eléctrica del corazón.

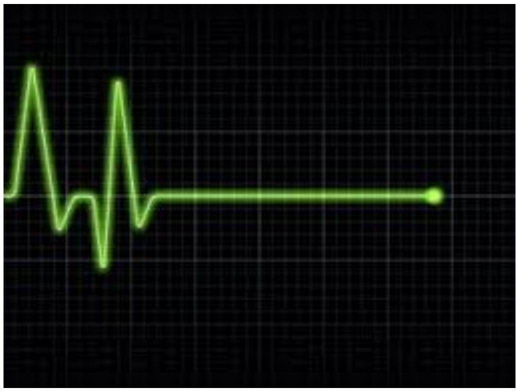


Figura 1. Electrocardiograma

En la figura 1 aparecen tramos donde la función crece, pero también llega a un máximo y la función entonces decrece, vuelve a crecer, se mantiene y decrece; como se puede observar, en un tema tan cotidiano como puede ser un electrocardiograma se observan tres cosas importantes: existen intervalos donde la función crece, decrece o bien se mantiene constante.

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de las gráficas observemos las siguientes figuras.

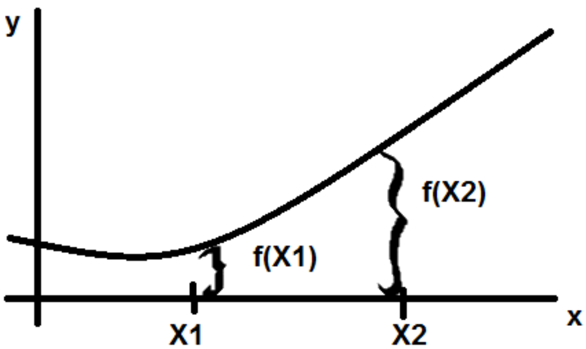


Figura 2. Función creciente

En la figura 2 se observa que cuando la gráfica de la curva es creciente, la curva crece o asciende conforme x aumenta.

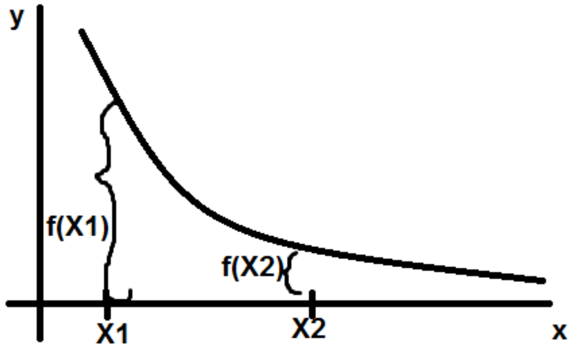


Figura 3. Función decreciente

En la figura 3 se observa que cuando la gráfica de la función es decreciente la gráfica desciende o baja conforme x aumenta.

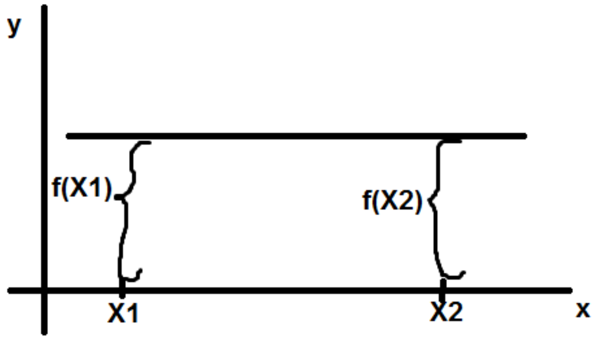


Figura 4. Función constante

En la figura 4, cuando la función es constante se mantiene el mismo valor para cualquier x en el dominio.

A continuación se da la definición formal de funciones crecientes, decrecientes y constantes.

Definición. Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1, x_2 dos números que están en I.

1) f es **creciente** en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

2) f es **decreciente** en I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

3) f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

La gráfica puede tener en ciertos intervalos valores más grandes o más pequeños, esto queda escrito mediante la siguiente definición:

Definición: Sea f una función definida en un intervalo I y sea c un número en I

1) $f(c)$ es el **máximo** (**o valor máximo**) de f en I si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en I.

2) $f(c)$ es el **mínimo** (**o valor mínimo**) de f en I si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en I.

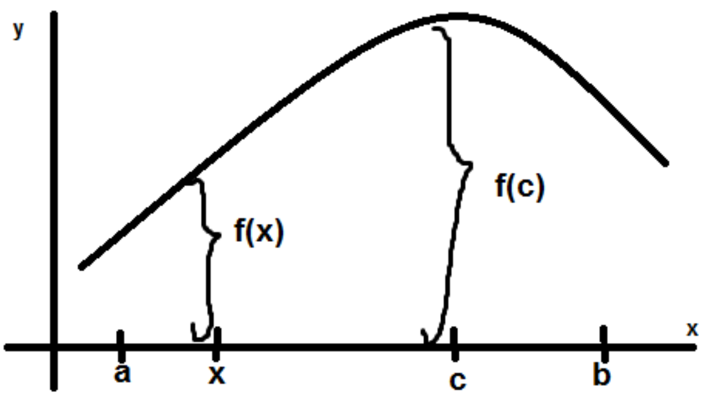


Figura 5. Valor máximo f(c)

Analizando la figura 5 si $f(c)$ es el máximo de f en el intervalo I, se dice que f alcanza su máximo en c, en su caso $(c, f(c))$ es el punto más alto en la gráfica de la función.

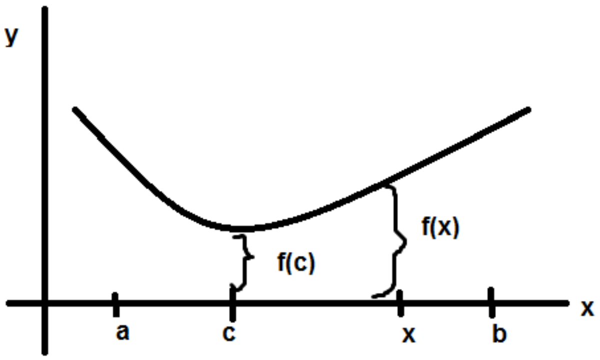


Figura 6. Valor mínimo f(c)

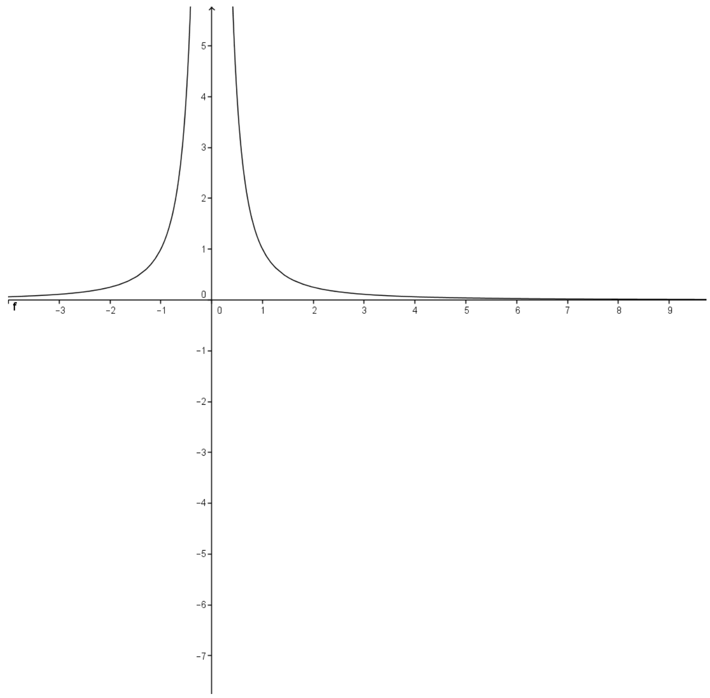
En la figura 6 se observa que $f(c)$ es el mínimo de f en el intervalo I, donde el punto más bajo o inferior que puede tomar la curva es $(c, f(c))$.

Ahora bien, los máximos y mínimos son los **valores extremos** de f.

No olvides que si una función es constante, $f(c)$ puede ser un máximo y un mínimo que f alcanza en todo número real c.

Ejemplo: Determina el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en los intervalos $[1,2]$, $(1,2]$, $(1,2)$, $(-2,-1]$, $[-1,2]$ y determina si existe un máximo o mínimo.

Observemos la gráfica de la función:



Inspeccionando la gráfica se presentan, a manera de tabla, los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o ninguna.

Intervalo	f	Máximo	Mínimo
[1,2]	Decreciente	$f(1) = 1$	$f(2) = ¼$
(1,2]	Decreciente	No tiene	$f(2) = ¼$
(1,2)	Decreciente	No tiene	No tiene
(-2,-1]	creciente	$f(-1) = 1$	No tiene
[-1,2]	Ni uno ni otro	No tiene	$f(2) = ¼$

En la gráfica se observa que en el intervalo abierto (1,2) la función no alcanza ni un máximo ni un mínimo, también puedes notar que la curva no es continua en el intervalo [-1,2], aunque la gráfica es creciente en el intervalo [-1,0) y decreciente en (0,2], sin embargo no se puede decir nada de máximos y mínimos en el intervalo [-1,2].

Algo importante a considerar es que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un mínimo y un máximo por lo menos una vez en $[a, b]$.

Referencias:
Información extraída a partir de Swokowski, E. (1989). Cálculo con geometría analítica. Estados Unidos de América: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rivera Rosales, Elsa Edith, 26 de mayo de 2014, Funciones creciente y decreciente, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.