

# Regla de la Cadena

Hasta este momento se han presentado fórmulas para encontrar derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones, sin embargo, todas estas reglas han sido para expresiones que contienen a la variable expresada como  $x^n$ , donde  $n$  es un entero (o incluso puede ser un número fraccionario), sin embargo, no se ha presentado aún una fórmula que pueda aplicarse directamente a una expresión de la forma:  $(x^3 + 4x)^3$ . Es claro que:

$$D_x(x^3 + 4x)^3 \neq 3(x^3 + 4x)^2$$

Veamos que el desarrollo de la potencia al cubo de la expresión da como resultado:

$$(x^3 + 4x)^3 = x^9 + 12x^7 + 48x^5 + 64x^3$$

Ahora bien, derivando la expresión anterior se tiene  $9x^8 + 84x^6 + 240x^4 + 192x^2 = 3x^2(x^2 + 4)^2(3x^2 + 4)$ , que es claramente diferente que lo que se obtuvo anteriormente (es decir  $3(x^3 + 4x)^2$ ).

Veamos la manera correcta de derivar una función "compuesta" mediante la fórmula de la cadena, a saber que si  $f$  y  $g$  son funciones tales que  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$ , entonces  $y = f(g(x))$ . Nota que  $(x^3+4x)^3$  puede expresarse de esta manera, sea  $y=u^3$  y  $u=x^3+4x$ .

El objetivo será encontrar una regla general para derivar  $f(g(x))$ , y ahora sí poderla aplicar a  $y = (x^3 + 4x)^3$  o en general a cualquier expresión de la forma  $y = [f(x)]^n$ .

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces, usando la notación de diferenciales:

$\frac{dy}{du} = f'(u)$  y  $\frac{du}{dx} = g'(x)$ . Considerando el producto  $\frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ , se llega a la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

Retomemos el ejemplo visto en esta sección para obtener la derivada de forma correcta

$$y = (x^3 + 4x)^3$$

# Regla de la Cadena

Considerando  $y = u^3$  y  $u = x^3 + 4x$ , y usando la regla se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3u^2(3x^2 + 4)$$

Ahora bien, sustituyendo lo que vale  $u$ , se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3(x^3 + 4x)^2(3x^2 + 4) = 9x^8 + 84x^6 + 240x^4 + 192x^2$$

Que es el resultado correcto mediante la fórmula de la cadena.

Formalmente la definición es:

**Swokowski, E. (1989) Regla de la cadena:** Si  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ , y las derivadas  $\frac{dy}{du}$  y  $\frac{du}{dx}$  existen ambas, entonces la función compuesta definida por  $y = f[g(x)]$  tiene una derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Lo esencial de la fórmula es que dada una función que está elevada a una potencia  $n$ -ésima, se aplica la misma idea de la derivada de una variable elevada a una potencia; el cambio radica en que ahora el exponente al cual está elevada la función pasa a ser el coeficiente, a la función se le resta un grado en su exponente y se deriva la función.

## Referencias:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 07 de abril de 2014, Regla de la cadena, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Información extraída a partir de Swokowski, E. (1989). Cálculo con geometría analítica. Estados Unidos de América: Grupo Editorial Iberoamérica.