Incremento y Tasas Promedio de Cambio

Incremento:

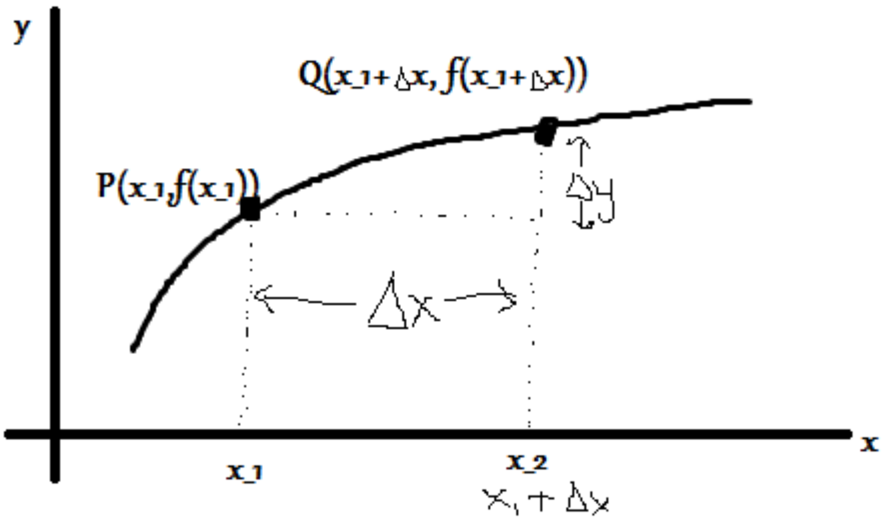
Al considerar una ecuación en general, por ejemplo $f(x)$, la variable x (independiente) algunas veces puede sufrir un cambio, y éste se denota por Δx (y se lee delta x); en particular si x varía de x_1 a x_2, entonces $\Delta x = x_2 - x_1$, así, el resultado de Δx es el incremento en x. De la relación anterior podemos obtener la relación de que:

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

Donde x_2 tiene un nuevo valor que es igual al valor inicial de x_1 más el incremento Δx. Por su parte la variable dependiente y, también puede sufrir un incremento que será Δy, expresándolo en términos de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, se tiene que:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

La siguiente figura muestra la relación de los incrementos tanto en la variable x como en la variable y.



Definición: Si $y = f(x)$ y x tiene un incremento Δx, entonces el incremento Δy de y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Veamos un ejemplo para comprender mejor el tema de los incrementos: considera a y como $y = 4x^2 + 6$, calcula el incremento Δy y además calcula el incremento Δy cuando x cambia de 3 a 3.5.

Entonces se tiene que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= [4(x + \Delta x)^2 + 6] - (4x^2 + 6)$$

$$= 4(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 6 - 4x^2 - 6$$

$$= 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + 6 - 4x^2 - 6$$

$$\Delta y = 4\Delta x(x + \Delta x)$$

Ahora bien, deseamos calcular Δy cuando $x = 3$ y $\Delta x = 0.5$, que sustituyendo en la fórmula para:

$$\Delta y = 4\Delta x(2x + \Delta x)$$

$$= 4(0.5)(6 + 0.5)$$

$$= 13$$

Por lo tanto el cambio en y es 7 cuando x varía de 3 a 3.5.

También este incremento pudiera calcularse con la fórmula $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3.5) - f(3) = [4(3.5)^2 + 6] - [4(3)^2 + 6] = 49 - 36 = 13$.

Tasas promedio de cambio:

La tasa de cambio es útil, pues diversas cantidades en la vida diaria varían de acuerdo al tiempo; por ejemplo, un farmacéutico puede tener especial interés en la rapidez con que cierto medicamento se disuelve en agua. A continuación se presenta la definición de tasa de variación.

Incremento y Tasas Promedio de Cambio

Definición: Sea $w = g(t)$, donde g es derivable y t representa el tiempo.

- La **tasa** (o **razón**) **media de variación** de $w = g(t)$ en el intervalo $[t, t+h]$ es $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$
- La **tasa** (o **razón**) **de variación** de $w = g(t)$ con respecto a t es $\frac{dw}{dt} = g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$

Cabe notar que algunas veces se suele llamar a $\frac{dw}{dt}$ como la **tasa** (o **razón**) **instantánea de variación** de w respecto a t.

Ejemplo: Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura, medida en grados centígrados después de t minutos, está dada por $g(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8$ para $0 \leq t \leq 5$.

a) Calcular la tasa media de cambio o variación de $g(t)$ durante el intervalo de tiempo $[4, 4.41]$.

b) Calcular la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$.

Analicemos primero el inciso a); al considerar la fórmula $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$ y sustituyendo los valores del tiempo $t = 4$ y el incremento $h = 0.41$, se obtiene que la tasa de cambio de g en $[4, 4.41]$ es:

$$\frac{g(4.41) - g(4)}{0.41} = \frac{[30(4.41) + 6\sqrt{4.41} + 8]}{0.41}$$

$$= \frac{12.9}{0.41} \approx 31.46°\, C/min$$

b) Ahora bien, la tasa de variación de $g(t)$ al tiempo t es $g'(t)$.

Al calcular la derivada de $g(t)$, se obtiene que $g'(t) = 30 + 6\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + 0 = 30 + \frac{3}{\sqrt{t}}$. Particularmente la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$ es:

$$g'(4) = 30 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 30 + \frac{3}{2} = \frac{63}{2} = 31.5°C/min$$

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 07 de abril de 2014, Incremento y tasas promedio de cambio, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.