Características de Derivación de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

La función definida por $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$ se llama función exponencial con base b y exponente x. El dominio de la función f es el conjunto de todos los números reales. En general, la función exponencial $y = b^x$ con $b > 1$ tiene una gráfica similar a la de $y = 2^x$; mientras que la gráfica de $y = b^x$ para $0 < b < 1$ es similar a la de $y = \frac{1}{2}^x$. Cuando $b = 1$, la función $y = b^x$ se reduce a la función constante $y = 1$.

Las características de la función exponencial $y = b^x$ son las siguientes:

1. Su dominio es $(-\infty, \infty)$
2. Su rango es $(0, \infty)$
3. Su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$
4. Su gráfica es una curva continua sin hoyos o saltos
5. Su gráfica crece de izquierda a derecha si $b > 1$ y decrece de izquierda a derecha si $b < 1$

Es conveniente definir ciertos conceptos útiles en la derivación de funciones exponenciales y logarítmicas, como es el caso de la letra e, en algunas ocasiones llamada *número de Euler* o *constante de Napier*, así como el logaritmo en base e se llama *logaritmo natural*.

Analicemos las definiciones de la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas:

Fórmula 1. $D_x\, e^x = e^x$ observa que la derivada de una función exponencial natural sigue siendo la misma función.

Ejemplo 1. Considera la función $y = e^x$, al obtener su derivada se tiene que $y' = e^x(1) = e^x$.

Fórmula 2. Sea $u = g(x)$ y $g(x)$ una función derivable, entonces $D_x\, e^u = e^u D_x u$.

Ejemplo 2. Analizando la función exponencial, ahora un poco más elaborada, se tiene que $y = e^{x^2+5x}$, al encontrar la derivada $y' = e^{x^2+5x}(2x+5) = 2xe^{x^2+5x} + 5e^{x^2+5x}$. Esta fórmula se simplifica a que la derivada de una función exponencial vuelve a ser la función exponencial por la derivada de su exponente.

Por su parte, la función logaritmo es considerada como la función inversa de la exponencial.

Las características de la función logaritmo son las siguientes:

1. Su dominio es$(0, \infty)$
2. Su rango es $(-\infty, \infty)$
3. Su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$
4. Su gráfica es una curva continua sin hoyos o saltos.

A continuación se presenta la fórmula para encontrar la derivada a una función logaritmo.

Fórmula 3. Si $u = g(x)$, donde $g(x)$ sea derivable y $g(x) \neq 0$, entonces $D_x \ln|u| = \frac{1}{u} D_x u$. Esta fórmula indica que la derivada de un logaritmo es la el cociente de la unidad sobre el argumento del logaritmo, por la derivada del función que compone el logaritmo.

Ejemplo 3. Sea $y = \ln|3x^2 + 3x^{-2}|$, la derivada de dicha función es $y' = \frac{1}{3x^2+3x^{-2}}(6x - 6x^{-3}) = \frac{6x-6x^{-3}}{3x^2+3x^{-2}} = \frac{2(x^4-1)}{x(x^4+1)}$

Es conveniente recordar un poco las leyes de los exponentes.

Características de Derivación de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Leyes de los exponentes.

Sean *a, b, u* y *v* números reales, entonces:

$$a^u a^v = a^{u+v}$$

$$(a^u)^v = a^{uv}$$

$$(ab)^u = a^u b^u$$

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Las fórmulas de derivación para funciones exponenciales y logarítmicas generales son:

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

$$D_x(a^u) = (a^u \ln a) D_x u, \qquad para\ u = g(x)$$

Referencia:
Rivera Rosales, Elsa Edith, 05 de mayo de 2014, Características, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.