Identificar Condiciones Básicas de Métodos de Programacón Lineal

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones se remonta, al menos, a Joseph Fourier, después de quien nace el método de eliminación de Fourier-Motzkin. La programación lineal se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

Los fundadores de la técnica son George Dantzig, quien publicó el algoritmo Simplex, en 1947, John von Neumann, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año, y Leonid Kantoróvich, un matemático de origen ruso, que utiliza técnicas similares en la economía antes de Dantzig y ganó el premio Nobel en economía en 1975. En 1979, otro matemático ruso, Leonid Khachiyan, diseñó el llamado Algoritmo del elipsoide, a través del cual demostró que el problema de la programación lineal es resoluble de manera eficiente; es decir, en tiempo polinomial. Más tarde, en 1984, Narendra Karmarkar introduce un nuevo método del punto interior para resolver problemas de programación lineal, lo que constituiría un enorme avance en los principios teóricos y prácticos en el área.

El ejemplo original de Dantzig de la búsqueda de la mejor asignación de 70 personas a 70 puestos de trabajo es un ejemplo de la utilidad de la programación lineal. La potencia de computación necesaria para examinar todas las permutaciones a fin de seleccionar la mejor asignación es inmensa (factorial de 70, 70); el número de posibles configuraciones excede al número de partículas en el universo. Sin embargo, toma solo un momento encontrar la solución óptima mediante el planteamiento del problema como una programación lineal y la aplicación del algoritmo Simplex. La teoría de la programación lineal reduce drásticamente el número de posibles soluciones factibles que deben ser revisadas (https://es.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n_lineal).

Es importante que aprendamos a identificar las condiciones básicas que debe tener cualquier problema de programación lineal, para ilustrar algunas de las propiedades que tienen en común todos los problemas de programación lineal, considere las siguientes aplicaciones típicas:

Identificar Condiciones Básicas de Métodos de Programacón Lineal

1. Un fabricante quiere elaborar un programa de producción y una política de inventario que satisfaga la demanda de ventas en periodos futuros. En términos ideales, el programa y la política permitirán a la empresa satisfacer la demanda y al mismo tiempo minimizar los costos totales de producción e inventario.

2. Un analista financiero debe seleccionar un portafolio entre diversas alternativas de acciones e inversiones. Al analista le gustaría establecer el portafolio que maximice el rendimiento sobre la inversión.

3. Un gerente de marketing quiere determinar cómo asignar mejor un presupuesto de publicidad fijo entre medios de publicidad alternos como la radio, la televisión, el periódico y las revistas. Al gerente le gustaría determinar la combinación de medios que maximice la efectividad de la publicidad.

4. Una empresa tiene almacenes en varias ubicaciones. Dadas las demandas específicas de los clientes, a la empresa le gustaría determinar cuánto debe enviar cada almacén a cada cliente, de modo que los costos del transporte local se minimicen.

Estos ejemplos son solo algunas de las situaciones en las cuales la programación lineal se ha utilizado a satisfacción, pero ilustran la diversidad de las aplicaciones de la programación lineal. Un escrutinio meticuloso revela una propiedad básica que tienen todos en común.

En cada ejemplo nos interesa la maximización o minimización de alguna cantidad. En el ejemplo 1, el fabricante quería minimizar los costos; en el ejemplo 2, el analista financiero quería maximizar el rendimiento sobre la inversión; en el ejemplo 3, el gerente de marketing quería maximizar la efectividad de la publicidad, y en el ejemplo 4, la empresa quería minimizar los costos de transporte totales. En todos los problemas de programación lineal, el objetivo es la maximización o minimización de alguna cantidad.

Identificar Condiciones Básicas de Métodos de Programacón Lineal

Todos los problemas de programación lineal tienen también una segunda propiedad: las limitaciones o restricciones que limitan el grado en que se puede perseguir el objetivo. En el ejemplo 1 el fabricante está limitado por restricciones que requieren el cumplimiento con la demanda de productos y por restricciones que limitan la capacidad de producción. El problema del portafolio del analista financiero está restringido por la cantidad total de fondos de inversión disponibles y los montos máximos que se pueden invertir en cada acción o bono. La decisión de selección de medios del gerente de marketing está limitada por un presupuesto de publicidad fijo y la disponibilidad de los diversos medios. En el problema de transporte, el programa de envíos de costo mínimo está restringido por el suministro de productos disponibles en cada almacén. Por tanto, las restricciones son otra función general de los problemas de programación lineal (Anderson, et al. 2011).

Como en otras técnicas de ciencia administrativa, en la programación lineal se utiliza un modelo matemático para representar el problema bajo estudio. La palabra lineal en el nombre se refiere a la forma de las expresiones matemáticas en este modelo. Y programación no se refiere a programación por computadora, aquí se le utiliza esencialmente como sinónimo de planeación. De esta manera, “programación lineal” significa la planeación de actividades que se representa por un modelo matemático lineal (Hillier, 2008).

La parte más difícil de la programación lineal es reconocer cuándo esta puede aplicarse y formular el problema matemáticamente. Una vez hecha esa parte, resolver el problema casi siempre es fácil. Para formular un problema en forma matemática, deben expresarse afirmaciones lógicas en términos matemáticos. Esto se realiza cuando se resuelven "problemas hablados" al estudiar un curso de Algebra. Algo muy parecido sucede aquí al formular las restricciones. Por ejemplo, considérese la siguiente afirmación: A usa 3 horas por unidad y B usa 2 horas por unidad. Si deben usarse todas las 100 horas disponibles, la restricción será:

$3A + 2B = 100$

Sin embargo, en la mayoría de las situaciones de negocios, no es obligatorio que se usen todos los recursos (en este caso, horas de mano de obra). Más bien la limitación es que se use, cuando mucho, lo que se tiene disponible. Para este caso, la afirmación anterior puede escribirse como una desigualdad:

$3A + 2B \leq 100$

Para que sea aceptable para programación lineal, cada restricción debe ser una suma de variables con exponente 1. Los cuadrados, las raíces cuadradas, etc., no son aceptables, ni tampoco los productos de variables. Además, la forma estándar para una restricción pone a todas las variables del lado izquierdo y solo una constante positiva o cero del lado derecho. Esto puede requerir algún reacomodo de los términos. Si, por ejemplo, la restricción es que A debe ser por lo menos el doble de B, esto puede escribirse como:

$A \geq 2B$ o $A - 2B \geq 0$

Nótese que pueden moverse términos de un lado a otro de la desigualdad como si fuera un signo de igualdad. Pero al multiplicar una desigualdad por 1, el sentido de esta desigualdad se invierte. Puede ser necesario hacer esto para que los coeficientes del lado derecho sean positivos. Por ejemplo, si se quiere que A sea por lo menos tan grande como B - 2, entonces:

$A \geq B - 2$

o $A - B \geq -2$

por último $B - A \leq 2$

Identificar Condiciones Básicas de Métodos de Programacón Lineal

Una nota final sobre desigualdades: es sencillo convertir una desigualdad en una ecuación. Todo lo que se tiene que hacer es agregar (o restar) una variable extra. Por ejemplo,

$B - A \leq 2$ es lo mismo que $B - A + S = 2$

En donde S representa la diferencia, o la holgura, entre B A y 2. S se llama variable de holgura. Por otro lado, se restará una variable de superávit en el caso siguiente:

$A - 2B \geq 0$ es lo mismo que $A - 2B - S = 0$

Algunos métodos de solución y algunos de los programas de computadora requieren que todas las desigualdades se conviertan en igualdades.

Restricciones de no negatividad: la metodología de programación lineal requiere que todas las variables sean positivas o cero; es decir, no negativas. Para la mayoría de los problemas esto es real, no se querrá una solución que diga: prodúzcanse menos dos cajas o contrátense menos cuatro personas. De tener un problema en que se quiera que una variable sea negativa, existe una forma para que se cumplan las restricciones de no negatividad.

Función objetivo: mientras que no existe un límite en el número de restricciones que puede tener un problema de programación lineal, solo puede haber un objetivo. La forma matemática del objetivo se llama función objetivo. Debe llevar consigo el maximizar o minimizar alguna medida numérica. Podrá ser maximizar el rendimiento, la ganancia, la contribución marginal o los contactos con los clientes. Podrá ser minimizar el costo, el número de empleados o el material de desperdicio. Con frecuencia el objetivo es evidente al observar el problema. Como el valor de la función objetivo no se conoce hasta que se resuelve el problema, se usa la letra Z para representarlo. La función objetivo tendrá, entonces, la forma:

Maximizar $Z = 4A + 6B$

o

Minimizar $Z = 4A + 6B$

Ejemplo:

El problema de dieta es un problema típico de programación lineal. Como se sabe por experiencia, las dietas se seleccionan para cumplir con una serie de criterios. Cada persona necesita cantidades diarias de calorías, vitaminas, proteínas, minerales y otros. También se tienen preferencias por los tipos de comida y las marcas. La dieta óptima será la que cumpla todas las necesidades a un costo mínimo. Para simplificar este problema, se supone que existen solo tres restricciones: la cantidad diaria de tres vitaminas. También se supone que solo se están considerando dos tipos de alimentos. As, el problema consiste en decidir cuánto comprar de cada alimento para satisfacer las tres restricciones y minimizar el costo. Supóngase que el alimento A y el alimento B son los dos tipos bajo consideración. El alimento A cuesta 12 centavos/onza y el alimento B 8 centavos/onza. Se quiere minimizar el costo total de los alimentos al mismo tiempo que satisfacer las tres restricciones vitamínicas. Se desean, por lo menos, 30 unidades de la vitamina W, 50 unidades de la vitamina X y 60 unidades de la vitamina Y. Cada onza del alimento A proporciona 2 unidades de la vitamina W, 4 unidades de la vitamina X y 7 unidades de vitamina Y. El alimento B proporciona 3, 3 y 6 unidades de W, X y Y, respectivamente por onza. ¿Cuántas onzas de cada alimento deben comprarse?

Comenzando con el objetivo de minimizar el costo total, sea:

A = total de onzas que se compran del alimento A

B = total de onzas que se compran del alimento B

La función objetivo puede escribirse como:

Minimizar: $Z = 12A + 8B$

Esto expresa el costo total en centavos. Pudieron haberse usado decimales y expresar el costo en dólares. Cada requerimiento vitamínico es una restricción. Además, cada una será una desigualdad, ya que las necesidades son tener por lo menos el número estipulado de unidades; más es aceptable. Para la vitamina W, el alimento A da 2 unidades/onza y B da 3 unidades/onza. La restricción es:

$2A + 3B \geq 30$ (vitamina W)

Para la vitamina X, el alimento A da 4 unidades/onza y el alimento B da 3 unidades/onza. Se necesitan por lo menos un total de 50, es decir:

$4A + 3B \geq 50$ (vitamina X)

De igual manera, para la vitamina Y se tiene:

$7A + 6B \geq 60$ (vitamina Y)

Las restricciones de no negatividad son $A \geq O$, $B \geq 0$.

Reuniendo todo esto, puede escribirse la formulación del problema, comenzando con la función objetivo.

Minimizar: $Z - 12A + 8B$

Restricciones:

$2A + 3B \geq 30$ vitamina W

$4A + 3B \geq 50$ vitamina X

$7A + 6B \geq 60$ vitamina Y

$A \geq 0$, $B \geq 0$ No negatividad

Cada una de las restricciones tiene una constante positiva del lado derecho. El lado izquierdo es una suma de variables lineales y cada variable aparece en la función objetivo (Gallagher & Watson, 1982).