Restricciones en la Programación Lineal

Las relaciones en las restricciones de un problema de PL forman un conjunto de ecuaciones simultáneas. Se recordará del estudio del Álgebra que un sistema de ecuaciones lineales simultáneas tiene una solución única si el número de ecuaciones independientes es igual que el número de variables. Entonces, si se tienen, por ejemplo, tres ecuaciones con tres incógnitas, puede encontrarse una solución única para cada variable. ¿Qué pasa si hay más variables que ecuaciones, por ejemplo, cuatro variables y dos ecuaciones? Entonces es posible obtener muchas soluciones; en general, un número infinito de soluciones. Este es el tipo de situación a la que se aplica programación lineal. En 1947 George Dantzig, quien en ese tiempo estaba comisionado en la Fuerza Aérea de Estados Unidos, desarrolló el "Método Simplex". Demostró que podía usarse una ecuación criterio (la función objetivo) para seleccionar de manera sistemática una solución "óptima" de entre muchas soluciones posibles. Además, este era un método general que se podía aplicar a problemas de cualquier tamaño. Las únicas limitaciones prácticas son las de tiempo, costo y disponibilidad de una computadora. En este capítulo se describe el Método Simplex. No debe perderse de vista que este es un método general; funciona para cualquier problema de PL. Para ciertos casos especiales, existen métodos más fáciles de solución. Lo más importante es que el conocimiento de este método debe ampliar la idea del funcionamiento de la PL y estimular la imaginación para las aplicaciones a problemas de la vida real.

RESTRICCIONES AUMENTADAS

El Método Simplex utiliza una tabla, en la cual hay una columna para cada variable y un renglón para cada restricción. Además, cada restricción se debe expresar en lo que algunas veces se llama la forma estándar: como una igualdad. Es decir, cada restricción en el problema de PL primero se debe aumentar con variables extra para convertirla en igualdad. Se describirá cómo se aumentan las restricciones y después se analiza en forma breve el método Simplex. Cualquier desigualdad puede convertirse en una igualdad agregando (o restando) solo una variable extra. Entonces, una restricción del tipo ≤:

$$7X1 + 7X2 \leq 49$$

se convierte en

$$7X1 + 7X2 + S3 = 49$$

Se ha agregado una variable de holgura para que absorba la holgura, o la diferencia en la que 7X1 + 7X2 puede ser menor que 49. El aumento de las restricciones del tipo ≤ siempre se debe hacer de esta manera.

De igual forma, una restricción del tipo ≥:

$$X2 \geq 2$$

se convierte en

$$X2 - S4 = 2$$

Se ha restado una variable de excedente para que consuma el exceso de X2, o sea, lo que se pasa de 2. No obstante, en este caso debe agregarse otra variable. Esta variable extra, llamada variable artificial se aumenta como sigue:

$$X2 \geq 2$$

se convierte en

$$X2 - S4 + A5 = 2$$

La razón de esto es que, si no se agrega la variable artificial, se violarán las restricciones de no negatividad. Para comprenderlo, se dejará sin aumentar. El Método Simplex comienza por hacer todas las variables reales iguales que cero. Entonces:

$$X2 - S4 = 2$$

Sea X2=0, entonces

$$-S4=2$$

o

S4 = -2 (que viola la restricción de no negatividad)

No importa el hecho de que X2=0 viola la restricción original. En términos algebraicos es legítimo. La variable artificial opera para mantener todas las variables no negativas cuando X2 es menor que 2. Si X2=0 entonces S4=0 y

$$X2-S4+A5=2$$

$$A5=2$$

En resumen, se aumentó una restricción del tipo ≥ restando una variable de excedente y sumando una variable artificial (-S +A).

¿Qué sucede con las restricciones que ya son una igualdad? La respuesta técnicamente correcta es que no es necesario hacer nada si una de las variables tiene coeficiente uno y coeficientes cero en todas las otras restricciones. De otra manera, debe agregarse una variable artificial. Se sugiere siempre agregar la variable artificial y olvidar el caso especial de uno/cero en los coeficientes. La razón para aumentar variables artificiales después será más clara.

Todas las variables que aparecen en una restricción también deben aparecer en la función objetivo. Así, cada variable de holgura, de excedente o artificial que se aumenten también deben agregarse a la función objetivo.

¿Cuáles son sus coeficientes? Para las variables de holgura o excedente la respuesta es fácil: siempre son cero. Esto significa que no importa si están en la solución. Ahora bien, las variables artificiales tienen un problema diferente: no se desea que estén en la solución final. Recuérdese que solo se usan para evitar que las variables de excedente violen las restricciones de no negatividad (y para las ecuaciones). El que una variable artificial esté en la solución final significa que algo anda mal. Para mantenerlas fuera de la solución, se les asignará un coeficiente en la función objetivo por lo menos 100 veces más grande que cualquier otro coeficiente y con el signo adecuado para garantizar que salgan. Así, al maximizar se asignará - MA, en donde M es un número muy grande. Si se trata de minimizar, se seleccionará + MA. Nótese que hay reglas fijas para cada tipo de restricción y que las variables de holgura y de excedente siempre tienen coeficiente cero en la función objetivo. Lo único que cambia es el signo para las variables artificiales en la función objetivo: se selecciona de manera que estas variables salgan de la solución final.

EL MÉTODO SIMPLEX EN FORMA GLOBAL

El Método Simplex no es más que un enfoque complicado de prueba y error para resolver problemas de PL. Recuérdese el método de prueba y error que se describió como "método gráfico". Ahí se aprovechó el hecho de que por lo menos un punto de intersección de la frontera extrema es óptimo. Sencillamente se probaron todos estos puntos usando la función objetivo. El Método Simplex también emplea los puntos de intersección, pero no prueba todos los puntos. Comienza en el origen y selecciona los que dan la mayor mejora en el valor de la función objetivo. Así, al moverse de un punto de intersección a otro, la función objetivo siempre está mejorando. Esto hace que el Método Simplex sea más eficaz que el método gráfico. Se construye una tabla con una solución inicial y se prueba si esa solución es óptima. Si no es óptima (la solución inicial nunca lo es), se analiza la tabla y se prueba la nueva solución. Este procedimiento se repite hasta que se encuentra una solución óptima. Nótese que cada tabla representa una nueva solución; en esta forma, tabla y solución son sinónimos. La función objetivo debe también mejorar en cada nueva tabla.