Operaciones entre Matrices: Suma, Resta y Multiplicación

Las operaciones elementales que se efectúan entre matrices, son principalmente la suma, resta y multiplicación. Para obtener la suma de dos matrices, primero se debe de verificar que las dimensiones de las mismas coincidan para que la operación esté bien definida, pues no es válido que sobren o falten elementos en las matrices que se están sumando.

Dos matrices se dicen iguales sí y sólo sí tienen la misma dimensión e idénticos elementos en las posiciones correspondientes, es decir $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ en particular se tiene que

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ pero } \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Para la **suma** de dos matrices, se suma cada par de elementos correspondientes; en general se tiene que

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2\square} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

entonces $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_m + b_{m2} \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$

Un ejemplo de la suma de dos matrices cuadradas es:

$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$ entonces $A + B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + 7 & 5 + 9 \\ -3 + 10 & -7 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{4} & 14 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Veamos ahora la suma con matrices rectangulares, sean

$C = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 13 & 15 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 35 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$ entonces $C + D = \begin{bmatrix} 9 + 5 & -6 - 13 \\ 13 + 1 & 15 + 35 \\ -7 + 8 & 4 + 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 14 & 50 \\ 1 & 21 \end{bmatrix}$

En el caso se estén sumando matrices de diferente dimensión, se dirá entonces que la suma no está definida, por ejemplo:

$E = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 9 & 4 & 13 \\ -16 & -5 & 11 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ -8 & 14 \\ \frac{5}{7} & 16 \end{bmatrix}$

entonces $E + F = No\ está\ definida\ la\ operación$

Se dice que la operación no está bien definida, pues las matrices de las dimensiones no coinciden, pues la matriz E es de dimensión $3x3$, mientras que la matriz F es de dimensión $3x2$.

La **resta** se realiza de forma análoga a la suma considerando, de nueva cuenta, que para efectuar una suma, las dimensiones de las matrices deben de coincidir. En general, se tiene que:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

entonces $A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_m - b_{m2} \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$

Por ejemplo, al restar las matrices:

$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$ entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} - 7 & 5 - 9 \\ -3 - 10 & -7 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-25}{4} & -4 \\ -13 & -22 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar, dentro de las operaciones de matrices también se considera la multiplicación de un escalar por una matriz, lo cual no es más que multiplicar cada elemento de esa matriz por el escalar dado. Por ejemplo, sea el escalar igual a 3, entonces

$$3\begin{bmatrix} 4 & -8 & 11 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(4) & (3)(-8) & (3)(11) \\ (3)(2) & (3)(9) & (3)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -24 & 33 \\ 6 & 27 & 18 \end{bmatrix}$$

El procedimiento para encontrar un **producto de matrices** es un poco más complicado, pero no difícil de realizar; simplemente se debe tener cuidado a la hora de hacer las operaciones.

Vemos el procedimiento paso por paso; antes que todo, debes de verificar la dimensión de las matrices las cuales se están multiplicando para saber si la operación se puede efectuar:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Observemos, la dimensión de la matriz A es $m\times n$ (m filas y n columnas), y la dimensión de la matriz B es $n\times p$ (n filas y p columnas); entonces, las columnas de la matriz A deben de coincidir con las filas de la matriz B, para que la operación esté bien definida.

Operaciones entre Matrices: Suma, Resta y Multiplicación

Ejemplo 1. Primero, con matrices de dimensión 2×2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, el producto $A\times B$ se puede llevar a cabo, pues las dimensiones lo permiten; esto es, $A_{2\times2}\times B_{2\times2} = C_{2\times2}$, el resultado será una matriz de dimensión 2×2.

El producto se realiza multiplicando una columna de la matriz B por una fila de la matriz A y sumando sus elementos.

$$A\times B = \begin{bmatrix} (1)(2)+(8)(-4) & (5)(2)+(7)(-4) \\ (1)(6)+(8)(3) & (5)(6)+(7)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Ahora sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times1}$ el producto está bien definido, porque las columnas de la matriz A coinciden en la dimensión con las filas de la matriz B.

$$A_{3\times2}\times B_{2\times1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times1} = C_{3\times1}$$

$$A_{3\times2}\times B_{2\times1} = \begin{bmatrix} (5)(1)+(9)(3) \\ (5)(2)+(9)(8) \\ (5)(4)+(9)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

En este punto es bueno mencionar que **la multiplicación de matrices no es conmutativa**, pues $A\times B \neq B\times A$.

Considerando los ejemplos anteriores, del ejemplo 1 se sabe que

$$A \times B = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix}$$

Ahora encontremos el producto

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) + (6)(5) & (-4)(1) + (3)(5) \\ (2)(8) + (6)(7) & (-4)(8) + (3)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 11 \\ 58 & -11 \end{bmatrix}$$

Se observa claramente la propiedad de la no validez de la conmutatividad de las matrices.

$$A \times B = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 32 & 11 \\ 58 & -11 \end{bmatrix} = B \times A$$

En el ejemplo 2 se tiene que

$$A_{3\times 2} \times B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Mientras que

$$B_{2\times 1} \times A_{3\times 2} = \textit{no está definido}$$

$\neq$

Esta propiedad no la debes de olvidar, pues es pieza clave para poder realizar el producto entre matrices, la leyenda conocida desde primaria que dice que "el orden de los factores no altera el producto", en las matrices no es válida.

Referencia:

(Rivera Rosales, 2013) Operaciones entre matrices: suma, resta y multiplicación, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.