Un Binomio Elevado a Cualquier Potencia

Para escribir las potencias de cualquier binomio, revisemos la estructura de algunas de ellas. Si efectuamos el producto directamente, se tiene:

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + \ y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + \ y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + +4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + \ y^4$$

Observemos ciertas características conservadas por los desarrollos anteriores:

1. Se tiene $n+1$ términos; donde n es el exponente al cual está elevado el binomio
2. En el primer término el exponente de x es n y decrece de unidad en unidad en cada término
3. En el segundo término aparece la y y aumenta de unidad en unidad en cada término
4. Si se suman los exponentes de x y y en cada término, el resultado es n
5. Existe cierta simetría en los coeficientes de los términos
6. Siempre el coeficiente del primer término es la unidad, y el del segundo término es n
7. En cualquier término, se puede multiplicar el coeficiente por el exponente de x, y este producto se divide entre el exponente de y + 1; el resultado es el coeficiente del siguiente término

Por ejemplo, en el desarrollo de un binomio al cubo, elijamos el segundo término para verificar el paso siete:

$\frac{3(2)}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$ Que es el coeficiente del tercer término.

Es conveniente recalcar que, en el paso cinco, los coeficientes de los términos presentan cierta simetría, y ésta se observa claramente en un arreglo denominado triángulo de Pascal.

Nivel 0						1					
Nivel 1					1		1				
Nivel 2				1		2		1			
Nivel 3			1		3		3		1		
Nivel 4		1		4		6		4		1	
Nivel 5	1		5		10		10		5		1

Observa cómo los elementos de los extremos en cualquier fila son la unidad y cada elemento interior se obtiene como la suma de los dos elementos de la fila inmediata superior a ese elemento.

Es conveniente mencionar que en el desarrollo del teorema del binomio interviene una expresión denominada “factorial de un número”, el cual se denota como $n!$ y se obtiene como el producto de todos los reales consecutivos de 1 a n.

Un Binomio Elevado a Cualquier Potencia

Definición: $n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n \;\cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots 2 \cdot 1$

A continuación se muestra la regla general de un binomio elevado a cualquier potencia:

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k}$$

Donde el término $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ o simplemente puedes utilizar tu calculadora y teclear la función de combinaciones.

Por ejemplo, si quisiéramos calcular la combinatoria de 5 en 3, se tiene $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6(2)} = \frac{120}{12} = 10$; observemos que es el tercer coeficiente en el triángulo de Pascal en el nivel cinco.