Recurrencia

Recurrencia y transitoriedad

Se dice que un estado $\boldsymbol{i}$ es recurrente si la probabilidad de eventualmente regresar a $\boldsymbol{i}$, partiendo de $\boldsymbol{i}$, es uno, es decir, si

$$\boldsymbol{P(X_n = i\; para\; alguna\; n \geq 1 | X_0 = i) = 1.}$$

Un estado que no es recurrente se llama transitorio, y en tal caso la probabilidad anterior es estrictamente menor a uno.

De manera intuitiva, un estado es recurrente si con probabilidad uno la cadena es capaz de regresar eventualmente a ese estado, y cuando ello ocurre en algún momento finito, por la propiedad de Markov, se puede regresar a él una y otra vez con probabilidad uno. Debido a este comportamiento es que al estado en cuestión se le llama recurrente. En cambio, el estado se llama transitorio si existe una probabilidad positiva de que la cadena, iniciando en él, ya no regrese nunca a ese estado.

Recurrencia positiva y nula

Una cadena de Markov inicia en un estado recurrente, entonces regresa a él una infinidad de veces con probabilidad uno. Sin embargo, esta recurrencia puede presentarse de dos formas: cuando el tiempo promedio de retorno es finito o cuando es infinito. Esto lleva a la definición de recurrencia positiva y recurrencia nula respectivamente.

Recurrencia

Consideremos entonces que $\boldsymbol{j}$ es un estado recurrente. El tiempo de primera visita a este estado, a partir de cualquier otro estado $\boldsymbol{i}$, es la variable aleatoria discreta $\boldsymbol{\tau_{ij}} = \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1} : \boldsymbol{X_n} = \boldsymbol{j} \,|\boldsymbol{X_0} = \boldsymbol{i}\}$.

Recordemos que cuando el tiempo de primera visita se refiere al mismo estado recurrente de inicio y de llegada i, se escribe simplemente como $\boldsymbol{\tau_i}$ en lugar de $\boldsymbol{\tau_{ii}}$.

La esperanza de esta variable aleatoria es naturalmente el tiempo medio de recurrencia.

El tiempo medio de recurrencia de un estado recurrente $\boldsymbol{j}$, a partir del estado $\boldsymbol{i}$, se define como la esperanza de $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, y se denota por $\boldsymbol{\mu_{ij}}$, es decir,

$$\boldsymbol{\mu_{ij}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\tau_{ij}}) = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{n P_{ij}(n)}.$$

Nuevamente cuando el tiempo medio de recurrencia se refiere al mismo estado recurrente de inicio y de llegada i, se escribe simplemente como $\boldsymbol{\mu_i}$. Como hemos mencionado, esta esperanza puede ser finita o infinita, y ello lleva a la siguiente clasificación de estados recurrentes.

Se dice que el estado recurrente $\boldsymbol{i}$ es

1. recurrente positivo si $\boldsymbol{\mu_i} < \infty$.
2. recurrente nulo si $\boldsymbol{\mu_i} = \infty$.

Recurrencia

Existencia y unicidad de la distribución estacionaria

Toda cadena de Markov que es:

1. Irreducible
2. Recurrente positiva

tiene una única distribución estacionaria.

En particular, toda cadena finita e irreducible tiene una única distribución estacionaria.