Procesos de Markov

Como vimos antes, los procesos de Markov son modelos en donde se cumple que para cualesquiera estados $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1},$ se cumple la igualdad.

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_n \ | X_n = x_n).$$

Esta característica se conoce como propiedad de Markov.

La probabilidad

$$p_{x_{n+1} x_n} = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n),$$

Se llama probabilidad de transición. Representa la probabilidad condicional de que el sistema esté en x_{n+1} al tiempo $n+1$, dado que estaba en x_n en el tiempo n.

Esta probabilidad se denomina probabilidad de transición de un paso, ya que describe al sistema entre el tiempo n y $n+1$.

Cadena de Markov

Una cadena de Markov a tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias $\boldsymbol{X_n}$ que toma valores en un conjunto finito o numerable E, conocido como espacio de estados, y que satisface la propiedad de Markov.

En general, es cómodo designar los estados de la cadena usando los enteros no-negativos $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}$ y diremos que $\boldsymbol{X_n}$ está en el estado i si $\boldsymbol{X_n = i}$.

Probabilidades de transición

La probabilidad de que $\boldsymbol{X_{n+1}}$ esté en el estado j dado que $\boldsymbol{X_n}$ está en el estado i es la probabilidad de transición en un paso de i a j y la denotaremos por $\boldsymbol{P_{ij}}^{\boldsymbol{n\,n+1}}$:

$$\boldsymbol{P_{ij}}^{\boldsymbol{n\,n+1}} = \boldsymbol{P(X_{n+1} = j\,|X_n = i)}$$

En general, las probabilidades de transición dependen no sólo de los estados, sino también del instante en el cual se efectúa la transición.

Cuando estas probabilidades son independientes del tiempo (o sea, de n) decimos que la cadena tiene probabilidades de transición estacionarias u homogéneas en el tiempo. En este caso $\boldsymbol{P_{ij}}^{\boldsymbol{n\,n+1}} = \boldsymbol{P_{ij}}$ no depende de n y $\boldsymbol{P_{ij}}$ es la probabilidad de que la cadena pase del estado i a estado j en un paso.

A continuación, sólo consideramos cadenas con probabilidades de transición estacionarias.

Matriz de transición

Podemos colocar las probabilidades de transición en una matriz

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{00} & \boldsymbol{P}_{01} & \boldsymbol{P}_{02} & \cdots \\ \boldsymbol{P}_{10} & \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{13} & \cdots \\ \boldsymbol{P}_{20} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \boldsymbol{P}_{i0} & \boldsymbol{P}_{i0} & \boldsymbol{P}_{i0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Que será finita o infinita según el tamaño de E (espacio de Estados). P se conoce como la matriz de transición o la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

La i-ésima fila de P para i=0, 1,... es la distribución condicional de $\boldsymbol{X}_{n+1}$ dado $\boldsymbol{X}_{n} = \boldsymbol{i}$. Si el número de estados es finito, digamos $\boldsymbol{k}$, entonces P es una matriz cuadrada cuya dimensión es $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$. Es inmediato que

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{j} \mid \boldsymbol{X}_{n} = \boldsymbol{i}) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{j} \mid \boldsymbol{X}_{n} = \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots$$

De modo que cada fila de la matriz representa una distribución de probabilidad. Una matriz con esta propiedad se llama matriz estocástica o de Markov.