Aplicación

En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov.

Se trata de una cadena de Markov con dos estados {Soleado, Nublado} que para abreviar representaremos por {S, N}, siendo la matriz de probabilidades de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.9} & \mathbf{0.1} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} \end{pmatrix}$$

El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que, si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

1. Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   Los estados de la cadena los denotaremos por $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ haciendo corresponder el 0 al bajo y 1 y 2 al primer y segundo piso respectivamente. Las probabilidades de transición son:

   $\boldsymbol{P_{00} = P(R_n = 0 | R_{n-1} = 0)}$, esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta baja si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es 0, porque se supone que de etapa a etapa el ascensor se mueve.

$\boldsymbol{P_{00} = P(R_n = 1|R_{n-1} = 0)}$, esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta primera si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es 1/2. Basta leer el enunciado.

Y así sucesivamente vamos obteniendo las distintas probabilidades de transición cuya matriz es:

$$\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

Resolvemos $\boldsymbol{\pi' P = \pi}$ y con el supuesto $\boldsymbol{\sum_i \pi = 1}$, es decir,

$$\boldsymbol{(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}}$$

Así, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{\begin{cases} 4\pi_0 - 3\pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ \pi_0 - 2\pi_1 = 0 \\ 2\pi_0 + \pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ \displaystyle\sum_i \pi = 1 \end{cases}}$$

Aplicación

Cuyas soluciones son:

$$\boldsymbol{\pi_0 = 8/17}$$
$$\boldsymbol{\pi_1 = 4/17}$$
$$\boldsymbol{\pi_2 = 5/17}$$