Análisis de un Sistema de Colas con Canal Múltiple de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M/c)

Retomando el caso de OTC, la gerencia ha considerado, dado los resultados no son satisfactorios de las medidas obtenidas, agregar una segunda báscula del otro lado de la estación de pesado.

Utilizando el personal actual para que opere ambas básculas, las estimaciones de la gerencia tendrán como resultado una capacidad de peso aproximado de 40 camiones por hora en cada báscula.

En este caso, hay que tomar en cuenta que se trata de un proceso de servicio con "***c***" servidores idénticos, cada uno de los cuales atiende a los clientes de acuerdo a una distribución exponencial, con una cantidad promedio μ de clientes por unidad de tiempo.

Para que un sistema ***M/M/c*** alcance una condición de estado estable, la tasa total promedio de servicio $c * \mu$ debe ser estrictamente mayor que la tasa promedio de llegadas, λ, de otra forma seguiría creciendo indefinidamente.

Los datos, según las nuevas consideraciones de la OTC son:

$$c = 2\ servidores$$

$$\lambda = 70\ camiones$$

$$\mu = 40\ camiones$$

Note que $c * \mu > \lambda$, de modo que se puede llevar a cabo un análisis de estado estable para este sistema.

Cálculo de las medidas de rendimiento para un modelo M/M/c:

Las medidas de rendimiento a menudo se expresan en términos de la "intensidad de tráfico", ρ que es el cociente λ/μ, de esta forma, para el ejercicio anterior, la intensidad de tráfico es 1.75

Medidas de rendimiento:

1. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema (P_0):

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}\right) + \left(\frac{\rho^c}{c!}\right) + \left(\frac{c}{c-\rho}\right)} = 0.0909$$

Donde:

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \cdots + \frac{\rho^{c-1}}{(c-1)!}$$

Y:

$$k! = k(k-1) \dots 1$$

Con:

$$0! = 1$$

2. Número promedio en la fila (L_q):

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!} * \frac{1}{(c-\rho)^2} * P_0$$

$$L_q = \frac{(1.75)^3}{1!} * \frac{1}{(2-1.75)^2} * 0.06667$$

$$L_q = 5.7167$$

3. Tiempo promedio de espera en la cola (W_q):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{5.7167}{70} = 0.081667$$

4. Tiempo promedio de espera en el sistema (W):

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.081667 + \frac{1}{40} = 0.10667$$

5. Número promedio en el sistema (L):

$$L = \lambda * W = 70 * 0.1667 = 7.4667$$

6. Probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar (p_W):

$$p_W = \frac{1}{c!} * \rho^c * \frac{c}{c-\rho} * P_0 = 0.9091$$

$$P_W = \frac{1}{2!} * 1.75^2 * \frac{2}{2-1.75} * 0.06667 = 0.81667$$

7. Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (P_n):

Si $n \leq c$:

$$\mathrm{P}_n = \frac{\rho^n}{n!} * \mathrm{P}_0$$

n	P_n
0	**0.06667**
1	**0.11667**
2	**0.10210**
.	**.**
.	**.**
.	**.**

Si $n > c$:

$$\mathrm{P}_n = \frac{\rho^n}{(c)!\, c^{n-c}} * \mathrm{P}_0$$

n	P_n
3	**0.08932**
4	**0.07816**
.	**.**
.	**.**
.	**.**

8. Utilización

$$U = 1 - \left[\mathrm{P}_0 + \left(\frac{c-1}{c}\right) \mathrm{P}_1 + \left(\frac{c-2}{c}\right) \mathrm{P}_2 + \cdots + \left(\frac{1}{c}\right) \mathrm{P}_{c-1} \right]$$

$$U = 1 - \left[\mathrm{P}_0 + \left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{P}_1 \right] = 1 - 0.125 = 0.875$$