Prueba de una Afirmación a una Media:

El objetivo es poner a prueba una aseveración respecto de una media poblacional, cuando se conoce el valor de la desviación estándar poblacional.

Requisitos

1. La muestra es aleatoria simple.

2. Se conoce el valor de la desviación estándar poblacional σ.

3. Se satisface una o ambas de las siguientes condiciones: la población se distribuye normalmente o n > 30.

Estadístico de prueba para probar una aseveración sobre una media (σ conocida)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Valores P: Utilice la distribución normal estándar y remítase a la ilustración 1.

Valores críticos: Utilice la distribución normal estándar (ver tabla distribución normal estándar).

Una Prueba de Muestra Grande Acerca de una Media Poblacional

Considere una muestra aleatoria de n mediciones sacadas de una población que tiene media μ y desviación estándar σ. Se desea probar una hipótesis de la forma:

$$H_0 = \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Donde μ_0 es algún valor hipotético para μ, contra una hipótesis alternativa de una cola:

$$H_a = \mu > \mu_0 \qquad \mathbf{(2)}$$

El subíndice cero indica el valor del parámetro especificado por H_0. Observe que H_0 da un valor exacto para el parámetro a probar, mientras que H_a da un rango de posibles valores para μ.

-Lo Esencial de la Prueba-

La media muestral $\bar{x}$ es la mejor estimación del valor real de μ, que está por ahora en cuestión. ¿Qué valores de $\bar{x}$ le llevarían a pensar que H_0 es falsa y μ, es de hecho, mayor que el valor hipotético? Los valores de $\bar{x}$ que son extremadamente grandes implicarían que μ es mayor que el hipotético. En consecuencia, debe rechazarse H_0 si $\bar{x}$ es demasiado grande.

El siguiente problema es definir lo que significa “demasiado grande”. No es probable que ocurran valores de $\bar{x}$ que se encuentren a demasiadas desviaciones estándar a la derecha de la μ. Por tanto, se puede definir “demasiado grande” como estar a demasiadas desviaciones estándar de μ_0. Pero, ¿Qué es demasiado? Esta pregunta puede contestarse usando el nivel de significancia α, la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera.

Recuerde que el valor estándar se estima como:

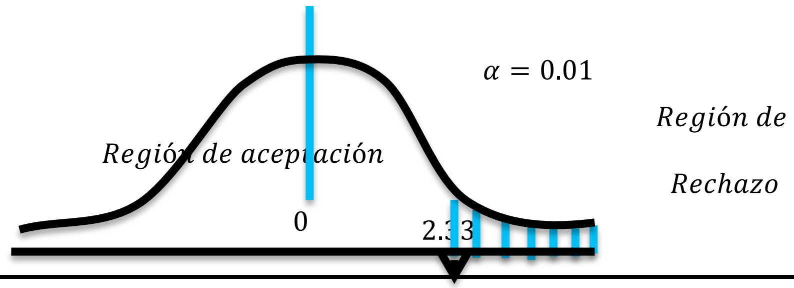
$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Como la distribución muestral de la $\bar{x}$ es aproximadamente normal cuando n es grande, el número de desviaciones estándar que $\bar{x}$ está desde μ_0, se puede medir usando el estadístico estandarizado de prueba

Prueba de una Afirmación a una Media:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad \textbf{(3)}$$

Que tiene una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera y μ_0 es verdadera y $\mu = \mu_0$. El nivel de significancia α es igual al área bajo la curva normal que se encuentra arriba de la región de rechazo. Entonces, si se desea $\alpha = .01$, se rechazará H_0 cuando $\bar{x}$ se encuentre a más de 2.33 desviaciones estándar a la derecha de μ_0. De manera equivalente, se rechazará H_0 si el estadístico de prueba estandarizado Z es mayor a 2.33.



Prueba de una Afirmación a una Media:

Ejemplo:

El promedio semanal de ganancias para trabajadores sociales es $670. ¿Los hombres de la misma posición tienen ganancias semanales promedio más altas que los de las mujeres? Una muestra aleatoria de $n = 40$ trabajadores sociales mostró $\bar{x} = \$725$ y $s = \$102$. Pruebe hipótesis apropiada usando $\alpha = .01$.

$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}$:

A usted le gustaría demostrar que el promedio semanal de ganancias para hombres es mayor a $670, que es el promedio semanal de ganancias para trabajadores sociales de sexo masculino, se puede demostrar la prueba formal de hipótesis en pasos:

$(\mathbf{1-2})$ $\boldsymbol{Hip\acute{o}tesis\ nula\ y\ alternativa}$:

$$H_0: \mu = 670 \text{ Contra } H_a: \mu > 670$$

$(\mathbf{3})$ $\boldsymbol{Estad\acute{i}stico\ de\ prueba}$:

Usando la información muestral, con s como estimación de la desviación estándar, calcule:

$$z \approx \frac{\bar{x} - 670}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{725 - 670}{\frac{102}{\sqrt{40}}} = 3.41$$

$(\mathbf{4})$ ***Región de rechazo***:

Para esta prueba de una cola, valores de $\bar{x}$ mucho mayores a 670 llevarian a rechazar H_0; o bien, lo que es equivalente, a valores del estadístico de prueba estandarizado z en la cola derecha de la distribución estándar normal. Para controlar el riesgo de tomar una decisión incorrecta cuando $\alpha = .01$, se debe establecer el valor crítico que separe las regiones de rechazo y aceptación para que el área de la cola derecha sea exactamente $\alpha = .01$. Este valor se encuentra en la tabla 3 del apéndice I como $z = 2.33$. La hipótesis nula será rechazada si el valor observado del estadisitico de prueba, z es mayor a 2.33.

$(\mathbf{5})$ ***Conclusión***:

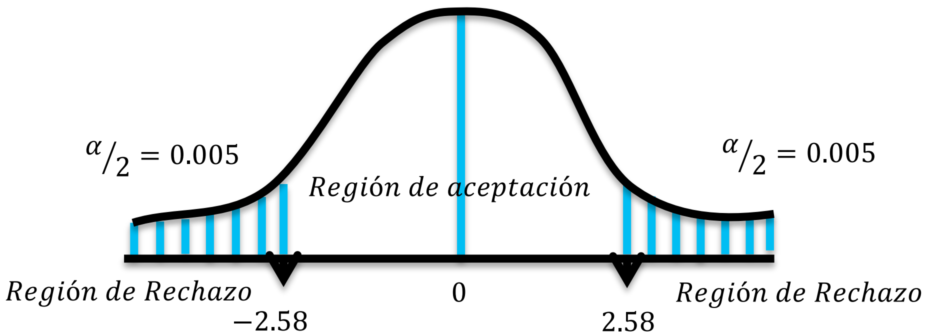
Compare el valor observado del estadístico de prueba, $z = 3.14$, con el valor critico necesario para rechazo, $z = 2.33$. Como el valor observado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se puede rechazar H_0 y concluir que el promedio semanal de ganancia para trabajadores sociales de sexo masculino es más alto que el promedio para trabajadoras. La probabilidad de que se tome una decisión incorrecta es $\alpha = .01$

Si se desea detectar desviaciones mayores o menores a μ_0, entonces la hipótesis alternativa es de dos colas, escrita como

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

Prueba de una Afirmación a una Media:

Lo cual implica que ya sea $\mu > \mu_0$ o que $\mu < \mu_0$. Valores de $\bar{x}$ que sean “demasiado grandes” o “demasiado pequeños” en términos de sus distancia desde μ_0, se colocan en la región de rechazo. Si se escoge $\alpha = .01$, el área de la región de rechazo se divide igualmente entre las dos colas de la distribución normal, como se ve en la figura 9.4. Con el uso estadístico de prueba estandarizado z, se puede rechazar H_0 se $z > 2.58$ o $z < -2.58$. Para valores diferentes de α los valores críticos de z que separan las regiones de rechazo y aceptación cambiarán de conformidad.



Ejemplo:

La producción diaria para una planta química local ha promediado 880 toneladas en los últimos años. A la gerente del control de calidad le gustaría saber si este promedio ha cambiado en meses recientes. Ella selecciona al azar 50 días de entre la base de datos y calcula el promedio y desviación estándar de las $n = 50$ producciones como $\bar{x} = 871$ toneladas y $s = 21$ toneladas, respectivamente. Pruebe la hipótesis adecuada usando $\alpha = .05$

***Solución*:**

***Datos*:**

$$n = 50$$

$$\bar{x} = 871\ toneladas$$

$$s = 21\ toneladas$$

$$\alpha = 0.05$$

***Hipótesis*:**

$$H_0: \mu = 880$$

$$H_a: \mu \neq 880$$

***Estadístico de Prueba*:**

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{871 - 880}{21/\sqrt{50}} = -3.0304$$

Prueba de una Afirmación a una Media:

Método del valor critico

$^{\alpha}/_{2} = 0.025$ $^{\alpha}/_{2} = 0.025$

Región de aceptación

Región de Rechazo *Región de Rechazo*

-1.96 1.96

$$\Rightarrow \textit{Por valor critico se Rechaza } H_0$$

Método del valor P

$$P = P(z > 3.03) + P(z < -3.03)$$

$$= [1 - P(z = 3.03)] + P(z < -3.03)$$

$$= [1 - 0.9988] + 0.0012 = 0.0012 + 0.0012 = 0.0024$$

$$Valor\ p < \alpha \quad \Rightarrow \quad Rechazo\ H_0$$

$$0.0024 < 0.05 \quad \Rightarrow \quad Rechazo\ H_0$$

$$\therefore \textit{La producción diaria es distinta de } 880 \textit{ toneladas}$$

Referencia:

Triola, M., (2013). Estadística. Decimoprimera edición. Pearson Educación. México.

Apuntes de Clase Estadística 1 FCFM Rivera Rosales Elsa Edith.