Aplicaciones de Máximos y Mínimos

Ejemplo (Maximización de utilidades). Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de $6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución

El ingreso producido por la venta de x artículos a $6 cada uno es $I(x) = 6x$ dólares. Por lo tanto, la utilidad por semana es

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ &= 6x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3 \\ &= -1000 + 0.0030.003x^2 + 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

A fin de encontrar el valor máximo de $U(x)$, buscamos puntos críticos en la forma usual y luego se pasa a investigar los máximos y mínimos. Primeramente, derivando $U(x)$, obtenemos

$$U'(x) = 0.006x - (3\text{x}\ 10^{-6}x^2)$$

Y haciendo $U'(x) = 0$, encontramos que $x = 0$ o $x = 2000$. Que vienen siendo las soluciones de $U'(x) = 0$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada, por lo que calculamos $U''(x)$

$$U''(x) = 0.006 - (6 \text{ X } 10^{-6})x$$

El criterio de la segunda derivada nos dice que si $U''(c) > 0$, entonces el punto $(c, U(x))$ es un mínimo local de la función $U(x)$, mientras que si $U''(c) < 0$, entonces $(c, U(x))$ es un máximo local de $U(x)$.

De modo que evaluamos la función $U''(x) = 0.006 - (6 \text{ X } 10^{-6})x$ en x =0 y en x =2000

$$U''(0) = 0.006 > 0$$

$$U''(2000) = -0.006 < 0$$

Por lo tanto, $x = 0$ es un **mínimo** local de $U(x)$, mientras que $x = 2000$ es un **máximo** local.

Este último valor (2000) representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. La **utilidad** está dada por

$$U(x) = -1000 + 0.0030.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

$$U(2000) = -1000 + 0.0030.003(2000)^2 + 10^{-6}(2000)^3 = 3000$$

Esto es, $\$3000$ por semana.

Ejemplo 2 (Decisiones sobre fijación de precios). El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

En el caso del artículo en cuestión, el precio en que x artículos pueden venderse por semana está dado por la ecuación de demanda

$$p = 12 - 0.0015x$$

Determine el precio y el volumen de ventas en que la utilidad es máxima.

Solución El ingreso por semana es

$$I(x) = px = (12 - 0.0015x)x$$

Luego, la utilidad está dada por

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$= (12 - 0.0015x)x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3)$$

$$= -1000 + 6x + 0.0015x^2 - 10^{-6}x^3)$$

Con la finalidad de encontrar el valor máximo de $U(x)$, hacemos $U'(x) = 0$

$$U'(x) = 6 + 0.003x - (3 \text{ X } 10^{-6})x^2 = 0$$

Cambiando signos, dividiendo entre 3 y multiplicando por 10^{-6} la ecuación completa, obtenemos $x^2 - 1000x - 2 \text{ X } 10^{-6} = 0$. Podemos factorizar el lado izquierdo como

$$(x - 2000)(x + 1000) = 0$$

Por lo que $x - 2000 = 0$ o $x + 1000 = 0$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos que las soluciones son

$$x = 2000 \quad o \quad x = -1000$$

(Estas soluciones también se pueden obtener usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas en lugar de la factorización, que es lo que se utilizó en este caso)

La solución $x = -1000$ es negativa por lo que no tiene alguna importancia en nuestro problema, por lo que la solución que debemos considerar es la de $x = 2000$.

Con el objetivo de verificar que esta en realidad representa un máximo local de la función de utilidad, podemos comprobar que $U''(2000) < 0$ de la siguiente manera

$$U''(x) = 0.003 - (6 \text{ X } 10^{-6})x$$

$$U''(2000) = 0.003 - (6 \text{ X } 10^{-6})(2000) = -0.009$$

Por lo tanto, el volumen de ventas de 2000 artículos por semana nos da la **utilidad máxima.** El **precio por artículo** que corresponde a este valor de x es

$$p = 12 - 0.0015x = p = 12 - 0.0015(2000) = \mathbf{9}$$

REFERENCIAS:

Arya, J.C., & Lardner R.W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Pearson Educación. pp. 561-563.