Inversa de una Matriz

Definición. Sea **A** una matriz cuadrada *n* x *n.* Entonces, una matriz **B** se dice que es una inversa de **A** si satisface las dos ecuaciones matriciales.

AB=I y **BA=I**

Donde I es una matriz identidad de tamaño *n x n.* En otras palabras, el producto de las matrices **A** y **B** en cualquier orden de la matriz identidad.

La matriz identidad de tamaño 2x2 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad de tamaño 3 x 3 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B debe ser una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**; de otra forma **AB** o **BA** no estuvieran definidos.

Tomando la definición anterior, buscaremos una matriz B que satisfaga la definición de inversa de una matriz A.

Inversa de una Matriz

Ejemplo:

Si $A =$: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y si A tiene inversa, existe una matriz B $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que es la inversa de A, que cumple que

AB=I y **BA=I**

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, podemos escribir la ecuación **AB=I** de forma matricial

A B = I

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices A y B obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si son iguales término a término, por lo que podemos obtener las igualdades siguientes

$$2a - c = 1 \qquad 2b - d = 0$$

$$a + c = 0 \qquad b + d = 1$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones lineales anterior, se deberá resolver por el método que se prefiera.

Inversa de una Matriz

Al resolver el sistema anterior se obtiene que

$$a = \frac{1}{3}, \qquad b = \frac{1}{3}, \quad c = -\frac{1}{3}, \quad d = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, como la matriz inversa de A es B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sustituiremos los valores obtenidos del sistema de ecuaciones lineales y se tiene que la matriz inversa de A es la siguiente

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

Para comprobar que efectivamente B sea la inversa de A, debemos comprobar que se cumpla

AB=I

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y además, BA=I

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa de una Matriz

En este caso se cumplen ambas igualdades por lo que se puede afirmar que

La matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

REFERENCIAS:

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Pearson educación. p. 355

Méndez Flores Cindy Patricia (2018). Universidad Autónoma de Coahuila.