Puntos Críticos y Desigualdades Cuadráticas

Para resolver una desigualdad cuadrática es importante conocer los puntos críticos. Los puntos críticos se obtienen realizando el mismo procedimiento que se utilizó anteriormente, obtener las raíces de la ecuación cuadrática. Las raíces se pueden obtener por medio de métodos de factorización o bien, utilizando la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se dará solución a la siguiente desigualdad cuadrática

$$x^2 + 3x < 4$$

Al igual que en el procedimiento de encontrar las raíces de la ecuación cuadrática

$x^2 + 3x = 4$, primeramente, se pasan todos los términos de un lado de la desigualdad

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

Se factoriza y se obtiene

$$(x - 1)(x + 4) < 0$$

Se igualan a cero ambos factores del lado izquierdo de la desigualdad para obtener los puntos críticos de la desigualdad cuadrática.

Las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ fungirán ahora como los puntos críticos $x2 + 3x - 4 < 0$. *Por lo anto los puntos críticos* son x= 1 y x= -4

Para obtener la solución de la desigualdad se graficarán los puntos críticos en la recta numérica.

Podemos notar que los puntos dividen a la recta en los siguientes intervalos

$$(-\infty, -4), (-4, 1)\ y\ (1, \infty)$$

Probaremos en cuál o cuáles de los intervalos anteriores la desigualdad original se cumple. Para ello, tomaremos un número real que pertenezca a cada uno de los intervalos respectivamente.

Primero seleccionaremos el valor de -6, ya que dicho valor pertenece al intervalo $(-\infty, -4)$. Se busca que sustituyendo el valor de -6 en la desigualdad a la que se le quiere encontrar solución, dicha desigualdad sea verdadera.

Sustituyendo el valor de x=-6 en la desigualdad $x^2 + 3x < 4$ obtenemos

$$(-6)^2 + 3(-6) < 4$$

$$36 - 18 < 4$$

$$36 - 18 < 4$$

$$18 < 4$$

La desigualdad resultó ser falsa ya que 18 es mayor que 4, por lo que **el intervalo** $(-\infty, -4)$ **no es solución de dicha desigualdad.**

Tomaremos al número -3 que pertenece al intervalo $(-4, 1)$ y sustituiremos el valor de -3 en la desigualdad para verificar si al sustituir dicho valor, la desigualdad es verdadera.

Sustituyendo el valor de x=-3 en la desigualdad obtenemos

$$(-3)^2 + 3(-3) < 4$$

$$9 + -9 < 4$$

$$0 < 4$$

Llegamos a un resultado verdadero, ya que efectivamente, cero es menor que 4.

Por lo que el intervalo $(-\mathbf{4}, \mathbf{1})$ **es solución a dicha desigualdad.**

Por último, se probará sustituyendo el valor de x=3 en la desigualdad para verificar si el intervalo $(1, \infty)$ es o no solución.

$$(3)^2 + 3(3) < 4$$

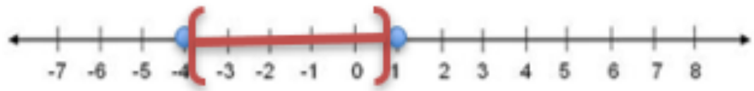
$$9 + 9 < 4$$

$$18 < 4$$

La desigualdad resultó ser falsa ya que 18 es mayor que 4, por lo que **el intervalo** $(\mathbf{1}, \infty)$ **no es solución de dicha desigualdad.**

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad cuadrática es el intervalo abierto $(-\mathbf{4}, \mathbf{1})$ y se puede representar en la recta numérica de la siguiente manera

Puntos Críticos y Desigualdades Cuadráticas



También podemos representar la solución como

-4 < x <1

Es decir, todos los números reales que son mayores que -4 y menores que 1 cumplen la desigualdad cuadrática $x^2 + 3x < 4$.