TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conoce un lado y un ángulo:

Para dar solución; es decir, encontrar los valores restantes, hay que saber cuáles son las cantidades que se tienen. De antemano sabemos que, al ser un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es de 90º y el otro es la cantidad que se entrega. Por ello, para calcular el 3er ángulo, sumamos el valor del ángulo conocido más los 90º y el resultado se lo restamos a 180º.

Una vez que se tienen los tres ángulos, se utilizan las funciones trigonométricas (sen, cos o tan) para calcular el valor de cada lado faltante. Por ejemplo:

- ✓ Si conocemos un cateto, para calcular el siguiente cateto se puede utilizar la tangente ($\tan(\theta)$), ya que esta involucra la razón entre los catetos y el ángulo entre ellos, y la función seno($\sin(\theta)$) o coseno($\cos(\theta)$) para calcular la hipotenusa.

- ✓ Si conocemos la hipotenusa, podemos utilizar las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para calcular los valores de los catetos.

Ejemplo: Resolver el triángulo rectángulo con h=14.6 y θ = 33.2º.

Solución:

1. Buscamos el valor para el ángulo faltante.

θ = 33.2
γ = 90 180 – (90+33.2) = 56.8º
α = ¿?

2. Para calcular el cateto opuesto utilizamos sen(θ).

$$\sin\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{CO}{14.6}$$

2.1. Se despeja la expresión para obtener el valor del CO.

$$\sin(33.2) = \frac{CO}{14.6}$$
$$(14.6)\sin(33.2) = CO$$

2.2. Se resuelve para CO.

$$(14.6)(0.5476) = 7.99 = CO$$

3. Para calcular el cateto adyacente utilizamos cos(θ).

$$\cos\emptyset = \frac{CA}{hipotenusa} = \frac{CA}{14.6}$$

3.1. Despejamos y resolvemos igual que para sen.

$$\cos(33.2) = \frac{CA}{14.6}$$
$$(14.6)(0.8368) = 12.2 = CA$$

Resolución de triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados:

Nuevamente aquí tenemos que identificar lo que se tiene para poder calcular los ángulos y el lado faltantes.

Ejemplo: resolver el triángulo que tiene los siguientes valores para un cateto y la hipotenusa.

a = 42.8 y h= 103

Solución:

1. Calcular el ángulo faltante, para ello podemos usar sen θ.

$$\sin\theta = \frac{CO}{hipotenusa} = \frac{42.8}{103} = 0.41553398$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.41553398 = 24.55^{o}$$

2. Ahora podemos calcular el 3er ángulo.

$$180-(90+24.55) = 65.5^{o}$$

3. El cateto faltante lo podemos calcular con el teorema de Pitágoras o con una función trigonométrica, para este ejemplo usaremos cos θ.

$$\cos(24.55) = \frac{CA}{hipotenusa} = \frac{CA}{103}$$

3.1. Despejamos para obtener el cateto adyacente.

$$(103)(\cos(24.55)) = CA = (103)(0.9096) = 93.69$$

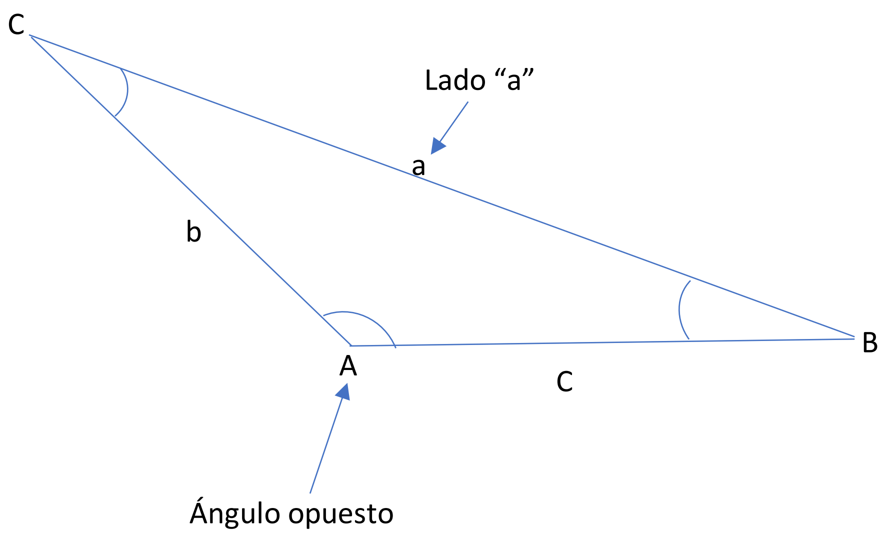
Triángulos oblicuángulos:

Este tipo de triángulos son los que no tienen ángulos rectos, para resolverlos, necesitamos conocer tres de cualesquiera de sus elementos, exceptuando los tres ángulos.

1. Conocer un lado y dos ángulos.
2. Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de los lados.
3. Conocer dos lados y el ángulo entre ellos.
4. Conocer los tres lados.

Para determinar los triángulos oblicuángulos, además de que se cumpla uno de los casos anteriores, se deben utilizar una de dos leyes, la de los senos o la de los cosenos.

Ley de los Senos: en ella se define que, para todo triángulo, el valor de sus lados es proporcional a los senos de los ángulos opuestos.



Podemos expresar la ley de los senos de la siguiente manera:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$$

Los casos en lo que se puede utilizar esta ley son los siguientes: el 1 y 2, veamos un ejemplo de cada uno de ellos.

Caso 2 (dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que c=628, b=480 y C=55º

Solución: sabemos que se trata del caso 2 porque conocemos 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

1. Acomodamos los datos que se conocen.

$$\frac{a}{sen\ (A)} = \frac{480}{Sen\ (B)} = \frac{628}{Sen\ (55)}$$

2. Observando las relaciones vemos que se puede calcular el ángulo B.

$$\frac{480}{Sen\ (B)} = \frac{628}{Sen\ (55)}$$

Despejamos

$$\sin B = \frac{480(\sin 55)}{628} = \frac{(480)(0.8208)}{628} = 0.6274$$

Para obtener B despejamos SEN, quedando

$$B = \sin^{-1}(0.6274) = 38^{o}50'$$

3. Conocidos dos ángulos podemos calcular el tercero que es A.

A = 180 –(38º 50' +55) = 86º 10'

4. Por último, calculamos el valor del lado a.

$$a = \frac{(480)(sen\ 86^{o}\ 10')}{sen(38^{o}50')} = \frac{(480)(0.9929)}{0.6271} = 759.99$$

Ley de los Cosenos: En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados multiplicados por el coseno del ángulo comprendido.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B$$

Y de los casos ya presentados, tomamos el 3 y 4 que son los que se pueden resolver por esta ley.

Caso 3 (dos lados y el ángulo entre ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que a=132, b=224 y C=28º 40’

Solución: una vez identificado el caso 3, donde tenemos 2 lados y el ángulo entre ellos, procedemos a resolver los elementos faltantes, que son el lado c y los ángulos A y B.

1. Podemos calcular el lado C.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Sustituimos y resolvemos.

$$c^2 = 132^2 + 224^2 - 2(132)(224)\cos(28^o\,40')$$
$$c^2 = 17424 + 50176 - (59136)(0.8774)$$
$$c^2 = 15714.0736$$
$$c = \sqrt{15714.0736} = 125.3558$$

2. Ahora como ya conocemos los 3 lados y un ángulo, podemos usar a ley de los SENOS para calcular otro de los ángulos.

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{Sen\,B} = \frac{c}{Sen\,C}$$
$$\frac{132}{sen\,A} = \frac{224}{Sen\,B} = \frac{125.3558}{Sen\,(28^o 40')}$$
$$\frac{132}{sen\,A} = \frac{125.3558}{Sen\,(28^o 40')}$$
$$\frac{132}{sen\,A} = \frac{125.3558}{0.4797}$$
$$\sin A = \frac{(132)(0.4797)}{125.3558} = 0.5051$$
$$A = \sin^{-1}(0.5051) = 30.33 = 30^o\,22'$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante B.

$$B = 180^o - (28^o 40' + 30^o 22') = 120^o 58'$$

Caso 4 (Conocer los 3 lados):

Resolver el triángulo ABC sabiendo que a=132, b=224 y c= 125.3558

Solución: sabemos que es el caso 4 porque solo conocemos los valores de los lados.

Nota: este problema toma los datos del anterior a propósito para comprobar que los cálculos son correctos.

1. Podemos calcular el ángulo A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Sustituimos y resolvemos.

$$(132)^2 = 224^2 + 125.3558^2 - 2(224)(125.3558)\cos A$$
$$17424 = 50176 + 15714.0766 - (56159.40)\cos A$$
$$17424 = 65890.0766 - (56159.40)\cos A$$
$$17424 - 65890.0766 = -(56159.40)\cos A$$
$$-48466.0766 = -(56159.40)\cos A$$
$$\frac{-(48466.0766)}{-(56159.40)} = \cos A$$
$$0.8630 = \cos A$$
$$\cos^{-1}(0.8630) = A$$

$A = 30^o 20'$ (como es una igualdad, podemos invertir los términos)

2. De igual forma calcularemos el ángulo B.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$224^2 = 132^2 + 125.3558^2 - 2(132)(125.3558)\cos B$$
$$50176 = 33138.0766 - (33093.9312)\cos B$$
$$\cos B = \frac{17037.9234}{-33093.9312} = -0.5148$$
$$B = \cos^{-1}(-0.5148) = 120^o 59'$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante C.

$$C = 180^o - (30^o 20' + 120^o 59') = 28^o 41'$$