Teoremas acerca de Límites

Anteriormente se demostró que el límite $f(x)$ cuando "x" se aproxima a "c" no depende del valor de f en $x = c$. Sin embargo, puede darse el caso de que este límite sea $f(c)$. En esta situación se puede evaluar el límite por sustitución directa. Es decir;

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \text{ Sustituir "x" por "c"}$$

TEOREMA 1
Si C es una constante, entonces;

$$\lim_{x\to a} C = C$$

Ejemplos:

"El límite de una constante es igual a la constante"

1. $\lim_{x\to 6} 3 = 3$
2. $\lim_{x\to 2} 10 = 10$
3. $\lim_{x\to 6} \pi = \pi$
4. $\lim_{x\to -5} 17 = 17$

TEOREMA 2

El límite "x" cuando "x" tiende a "a" es igual al valor de "a".

Si $\lim_{x\to a} x = a$

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to -4} x = -4$
2. $\lim_{x\to 2} x = 2$
3. $\lim_{x\to 0} x = 0$

Teoremas acerca de Límites

TEOREMA 3

Si C es una constante, entonces;

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

El límite de una constante por una función, cuando "x" tiende a "a", es igual a la constante por el límite de la función cuando "x" tiende "a" .

Ejemplos:

1. $\lim_{x \to 8} 5x = 5 \lim_{x \to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

2. $\lim_{x \to -2} \left(-3/_2\right) x = -3/_2 \lim_{x \to -2} x = \left(-3/_2\right)(-2) = 3$

$$\lim_{x \to -1} (x^3 - 4x + 1)$$

Teorema 6 **Teorema 3** **Teorema 1**

$$= \lim_{x \to -1} x^3 - \lim_{x \to -1} 4x + \lim_{x \to -1} 1$$

$$= (-1)^3 - 4(-1) + 1$$

$$= -1 + 4 + 1 = 4$$

TEOREMA 4

Sí $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces es único.

Teoremas acerca de Límites

TEOREMA 5

Límite de una suma:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

Límite de un producto:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$$

Límite de un cociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to 5}(10x + 8) = \lim_{x\to 5} 10x + \lim_{x\to 5} 8$

$$= 10 \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 8$$

Se sustituye el valor del límite en el valor de "x" y se realizan las operaciones indicadas para evaluar el límite

2. $\lim_{t\to 1}(3t - 1)(5t^2 + 2)$

$$\lim_{t\to 1}(3t - 1) \cdot \lim_{t\to 1}(5t^2 + 2)$$

$$(3(1) - 1) \cdot (5(1)^2 + 2)$$

$$(3 - 1) \cdot (5 + 2) = (2)(7) = 14$$

Teoremas acerca de Límites

3. $\lim_{s\to 7}\frac{s^2-21}{s+2} = \frac{\lim_{s\to 7} s^2-21}{\lim_{s\to 7}\ s+2}$

$$= \frac{7^2\ -\ 21}{7\ +\ 2} = \frac{28}{9}$$

TEOREMA 6

Límite de una Potencia

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$$

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

Se sustituye el valor del límite en el valor de "x" y se realizan las operaciones indicadas para evaluar el límite

2. $\lim_{x\to 10} x^3 = 10^3 = 1000$

3. $\lim_{x\to 2}(4x^2 + 3)$

$$\lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3$$

$$4\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3$$

$$= 4 * 2^2 + 3 = 16 + 3 = 19$$

4. $\lim_{x\to 1}(4x-1)^5$

Teoremas acerca de Límites

$$\lim_{x\to 1}(4x-1) = \lim_{x\to 1} 4x - \lim_{x\to 1} 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 1}(4x-1)^5 = 3^5 = 243$$

Límite de una Función Polinomial

Si p es una función polinómica y c un número real, entonces;

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y "c" un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces;

$$\boldsymbol{\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}}$$

El denominador debe ser diferente de cero al momento de sustituir el valor del límite para que exista y poder utilizar la sustitución directa. Si el denominador es igual a cero tenemos que factorizar

Ejemplos:

1 $\boldsymbol{\lim_{x\to -1} \frac{3x-4}{6x+2}}$

$$= \frac{\lim_{x\to -1} 3x-4}{\lim_{x\to -1} 6x+2} = \frac{3(-1)-4}{6(-1)+2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$\boldsymbol{2 \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1}}$

Teoremas acerca de Límites

$$= \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Si aplicamos la sustitución directa el denominador se hace cero; por lo tanto, hay que resolver el límite por factorización

3 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y se eliminan los factores comunes para simplificar la fracción; se sustituye el límite en el polinomio final.

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

$$= 1^2+1+1 = 3$$

Si aplicamos la sustitución directa el denominador se hace cero al igual que el denominador; a la forma 0/0 se le llama indeterminada, por lo tanto hay que resolver el límite por factorización para rescribir la ecuación.

4 $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3}$

$$= \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = x-2 = -3-2 = -5$$

5 $\lim_{x\to -1} \frac{t^3+1}{t^2-1}$

$$= \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{-1^2-(-1)+1}{(-1-1)} = \frac{3}{-2}$$

6 $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+2)(x^5-1)^3}{(\sqrt{x}+4)^2}$

Teoremas acerca de Límites

$$= \frac{(0+2)(0^5-1)^3}{\left(\sqrt{0}+4\right)^2} = \frac{(2)(-1)}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

7 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-1}{x} + \frac{1}{x}$

$$\frac{x^2+3x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+3x-1+1}{x} = \frac{x^2+3x}{x} = x+3 = 0+3 = 3$$

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\lim_{x\to c} sen x = sen\, c$	$\lim_{x\to c} \cot x = \cot c$
$\lim_{x\to c} cos x = \cos c$	$\lim_{x\to c} \sec x = \sec c$
$\lim_{x\to c} \tan x = \tan c$	$\lim_{x\to c} \csc x = \csc c$

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

2. $\lim_{x\to \pi} x\cos x = \left(\lim_{x\to\pi} x\right)\left(\lim_{x\to\pi} \cos x\right)$

$$= \pi\cos\pi = -\pi$$

Aplicamos sustitución directa y realizamos las operaciones correspondientes.

Recuerda que tu calculadora debe estar en radianes¡¡¡

Teoremas acerca de Límites

3. $\lim_{x\to 0} \boldsymbol{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} sen^2(0) = 0^2 = 0$

4. $\mathbf{lim}_{x\to \pi/2}\, \boldsymbol{sen\ x} = sen\left(\pi/2\right) = 1$

5. $\mathbf{lim}_{x\to 2}\, \boldsymbol{cos\frac{\pi x}{3}} = cos\frac{2\pi}{3} = -0.5$

TEOREMA 7

Límite de una raíz

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sea "n" un entero positivo. Si L > 0 cuando "n" es cualquier entero positivo, o si L ≤ 0 cuando "n" es un número entero positivo impar.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = L^{1/n}$$

1 $\mathbf{lim}_{x\to 9}\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 9} x^{1/2} = 9^{1/2} = 3$$

Aplicamos sustitución directa y realizamos las operaciones correspondientes.

2 $\mathbf{lim}_{x\to 0}\sqrt{x^2+4}$

$$= \sqrt{0^2+4} = \sqrt{4} = 2$$

Teoremas acerca de Límites

3 $\lim_{x\to -8} \frac{x-\sqrt[3]{x}}{2x+10}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -8} x - \lim\limits_{x\to -8} x^{1/3}}{\lim\limits_{x\to -8} (2x+10)} = \frac{-8-(-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-8+2}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

4 $\lim_{x\to 10} \sqrt{\frac{10x}{2x+5}}$

$$\lim_{x\to 10}\left[\frac{10x}{2x+5}\right]^{1/2} = \left[\frac{10(10)}{2(10)+5}\right]^{1/2} = \left[\frac{100}{25}\right]^{1/2} = 2$$

Técnica de racionalización

5 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right) = 0 \lim_{x\to 0} x = 0$$

Al sustituir de forma directa nos queda una forma indeterminada, es decir, $^0/_0$. Por lo que es recomendable rescribir la ecuación racionalizando el denominador:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}\right)$$

$$= \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \quad x \neq 0$$

$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$ La técnica de racionalización en el cálculo de los límites, se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1.

Teoremas acerca de Límites

Aplicamos sustitución directa y realizamos las operaciones correspondientes.

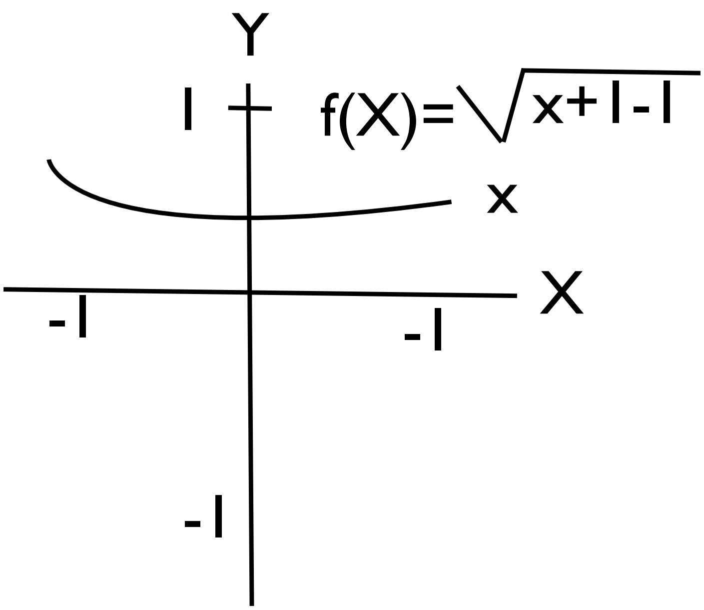
Sustituyendo el valor del límite tendremos;

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

x	-0.25	-0.1	-0.01	-0.0001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
f(x)	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	¿?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

Para verificar la repuesta anterior, podemos hacer uso de una gráfica:



Teoremas acerca de Límites

TEOREMA 8

Sí $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces;

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{0} = NO\ EXISTE$$

Ejemplo:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{t}}{t^2+t-2}$

$$= \frac{t^{1/2}}{t^2 + t - 2} = \frac{1^{1/2}}{1^2 + 1 - 2} = \frac{t^{1/2}}{0} = NO\ EXISTE$$

2. $\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)^2}{\sqrt{x-3}}$

$$= \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x-3}} = \frac{3^2+(6)(3)+9}{\sqrt{3-3}} = \frac{9+18+9}{\sqrt{0}} = \frac{36}{0} = NOEXISTE$$

3. $\lim_{x\to 5}\frac{4x+7}{x^2-25}$

$$= \frac{4x+7}{x^2-25} = \frac{4(5)+7}{5^2-25} = \frac{27}{0} = NOEXISTE$$