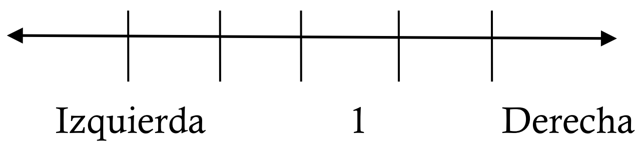
Gráfica de la Función

Supongamos que se pide dibujar la gráfica de la función dada por $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ donde $x \neq 1$. Para todos los valores distintos de x =1, es posible usar las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en x=1 no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica; se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a "x" por la izquierda y otro que lo haga por la derecha como se ilustra en la tabla.

x	f(x)
0.75	2.313
0.9	2.710
0.99	2.970
0.999	2.997
1	¿?
1.001	3.003
1.01	3.030
1.1	3.310
1.25	3.813



Para obtener los valores de la tabla anterior, se sustituye de manera normal como se muestra a continuación:

1º La función es: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

Al evaluarla sería: $f(1.1) = \frac{(1.1)^3-1}{1.1-1} = \frac{0.331}{0.1} = 3.31$

2º El dominio son los reales excepto 1 , porque el denominador se hace cero y la función no existe (ver capítulo de funciones, para ver condiciones de cada función).

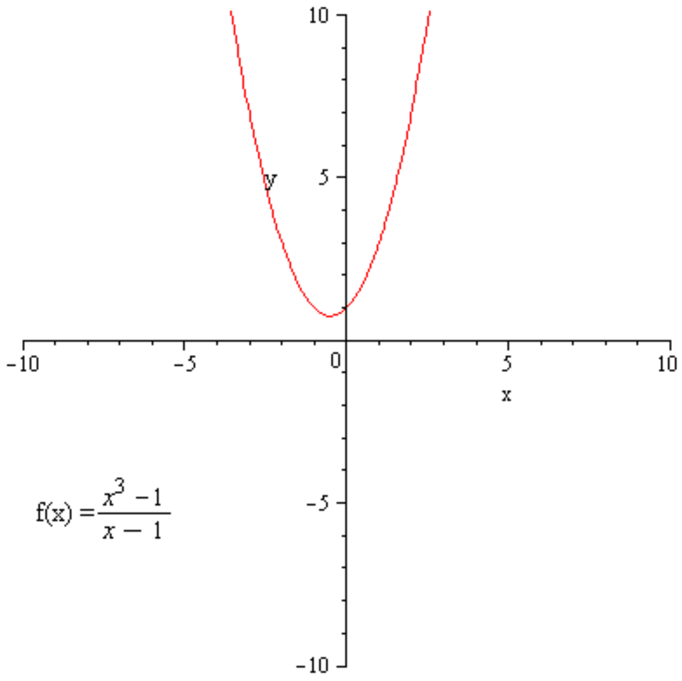
3º Establecer los valores de "x", yo seleccioné valores de entre -10 a 10 (el rango de valores queda a consideración) y los sustituimos para realizar la tabulación para graficar de manera convencional.

$$f(-8) = \frac{(-8)^3 - 1}{-8 - 1} = \frac{-513}{-9} = 57$$

Por lo tanto, la tabulación queda:

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
f(x)	91	57	31	13	3	1	7	13	43	73	111

4º Graficamos los valores anteriores. Como se observa, la gráfica de la función es una parábola con un hueco en punto (1,3). A pesar de que “x” no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia, f(x) se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites:



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Lo anterior se lee: “el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3”

Definición intuitiva de Límite

La noción de que f(x) tiende a un número L cuando x tiende a un número a, se define como, sí f(x) puede aproximarse arbitrariamente a un número infinito L, tomando a "x" suficientemente cercano pero distinto de un número "a", tanto por el lado izquierdo como por el derecho de "a", entonces; $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$x \to a^-$ significa que "x" tiende a "a" por la izquierda

$x \to a^+$ significa que "x" tiende a "a" por la derecha

Los límites unilaterales pueden tender a un valor común L, entonces;

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Por lo cual el límite existe y se escribe;

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

La existencia del límite de una función f en a no depende de si f está realmente definida en a, sino solamente de si festá definida para x cerca de a.

Recuerda, el punto cerrado en la gráfica significa que este valor pertenece a la función y el punto abierto es la inexistencia del punto, solamente se evalúan sus alrededores.

ESTIMACIONES NUMÉRICAS DE UN LÍMITE

Solamente sustituimos en la variable "x" todos los valores propuestos; y realizamos la operación que se nos indica.

Ejemplo 1: Evaluar la función$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite.

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ Los valores de "x" cercanos a 0 son:

x	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
f(x)	1.99499	1.99950	1.99995	¿?	2.00005	2.00050	2.00499

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

Ejemplo 2: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$Los valores de "x" cercanos a 2 son:

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
f(x)	0.75	0.9	0.99	0.999	¿?	1.001	1.01	1.1	1.25

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \ .99$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

Ejemplo 3:

Calcular el $\lim_{x \to 0} \frac{\text{senx}}{x} = 1$

x	f(x)
-0.1	0.9983341
-0.01	0.9999833
-0.001	0.9999998
0.1	0.9983341
0.01	0.9999833
0.001	0.9999998

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{senx}}{x} = \frac{\text{sen}(-0.1)}{-0.1} = 0.998334166$$

El modo de tu calculadora debe ser en radianes

Ejemplo 4:

Calcular el $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

x	f(x)
-0.1	-0.04995
-0.01	-0.00499
-0.001	-0.0005
0.1	0.04995
0.01	0.00499
0.001	0.0005

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos(-0.1)}{(-0.1)} = -0.049958$$

Hasta este punto de la sección, se han calculado los límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. A continuación se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos, con la finalidad de que logres el desarrollo de los siguientes métodos:

Método Numérico (construir una tabla de valores).

Método Gráfico (elaboración de gráfica a mano o con algún dispositivo).

Método Analítico (utilizar el álgebra o cálculo