

Limites donde interviene el infinito

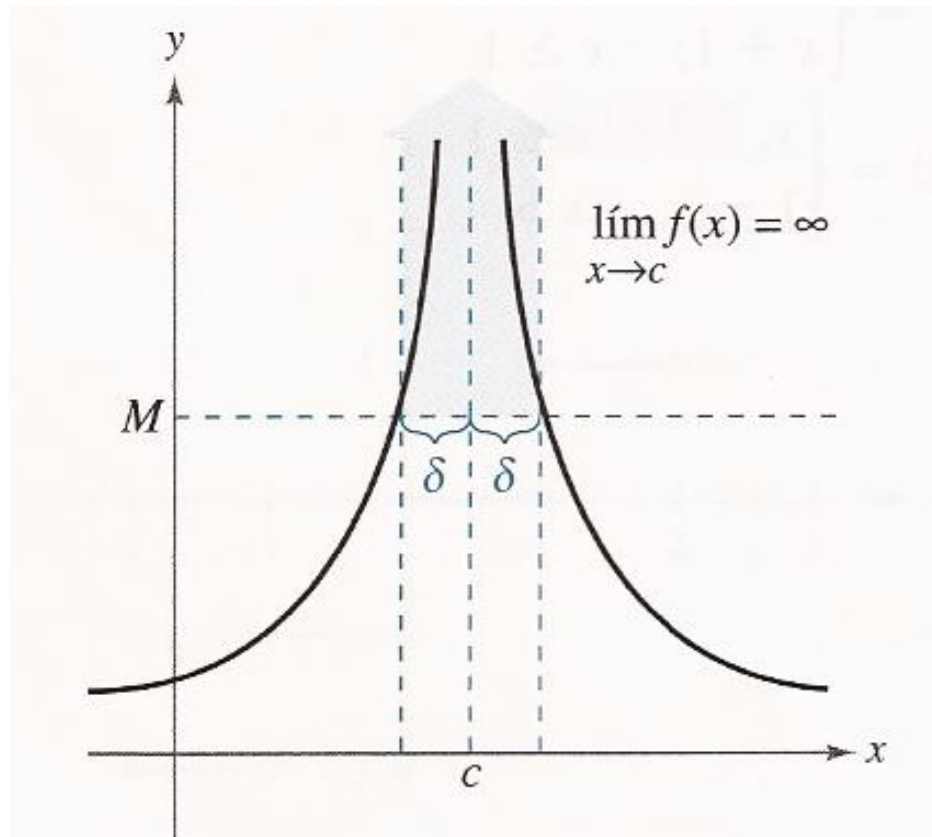
El límite de una función f cuando " x " tiende al número " a ", no existirá siempre que los valores funcionales crezcan o decrezcan sin cota, se denota;

$$f(x) \rightarrow \infty, \text{ cuando } x \rightarrow a \text{ o } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

En la siguiente gráfica, los valores funcionales decrecen sin cota (fig. a) cuando " x " tiende al valor de a .

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

Si $f(x)$ crece o decrece sin cota o sin límite cuando " x " se aproxima a " c ", se dice que el límite de $f(x)$



en " c " es infinito.

Limites donde interviene el infinito

Un límite infinito: Si $|f(x)|$ puede hacerse arbitrariamente grande al tomar el valor de "x" suficientemente cercano a "a", pero diferente del número "a", tanto por la izquierda como por la derecha de "a", entonces;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ó bien } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

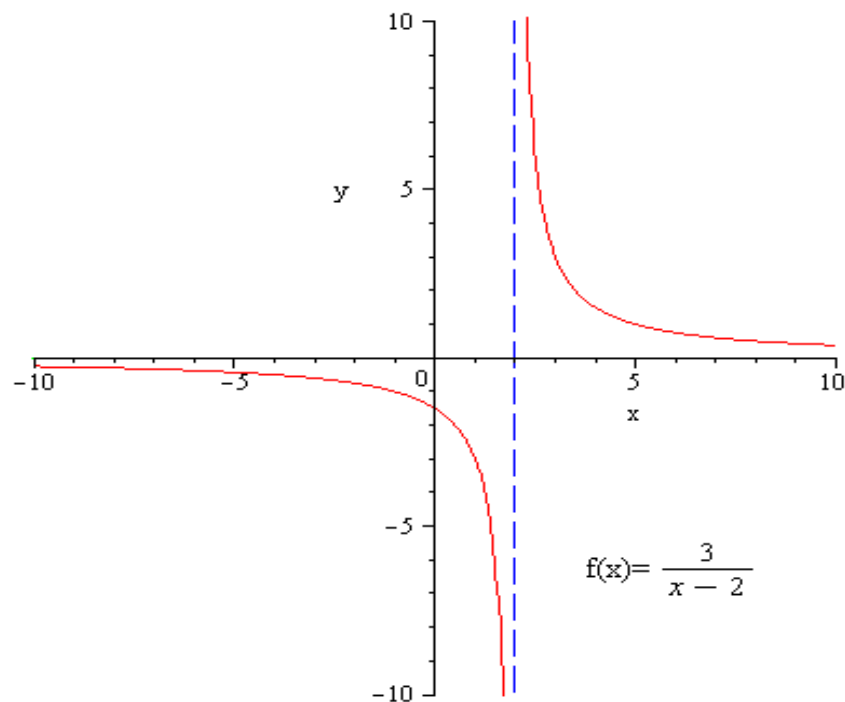
En las siguientes graficas se muestra el comportamiento no acotado de una función, cuando "x" tiende al valor "a" por un lado;

Ejemplo:

1) Si la función $f(x) = \frac{3}{x-2}$

Sustituyendo valores en la función:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
f(x)	-6	-30	-300	-3000	¿?	3000	300	30	6



Limites donde interviene el infinito

Se observa lo siguiente:

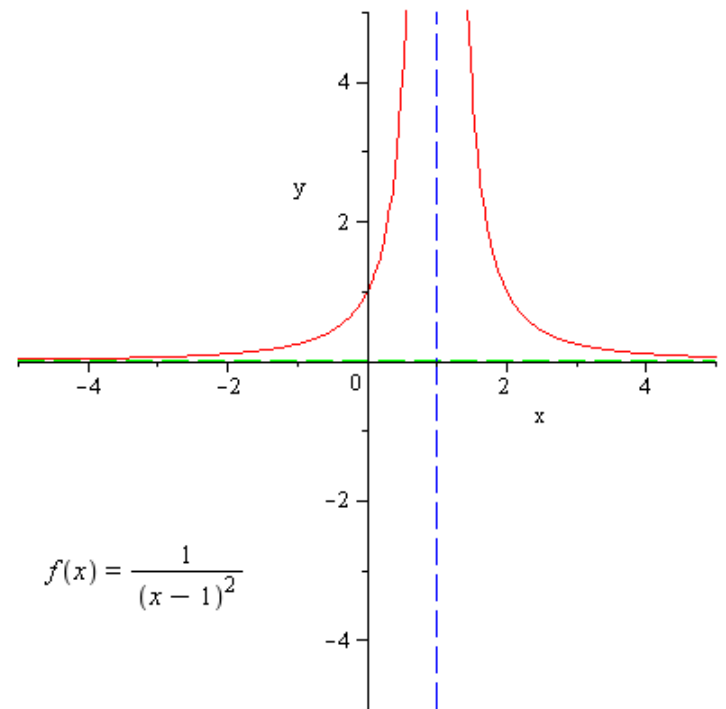
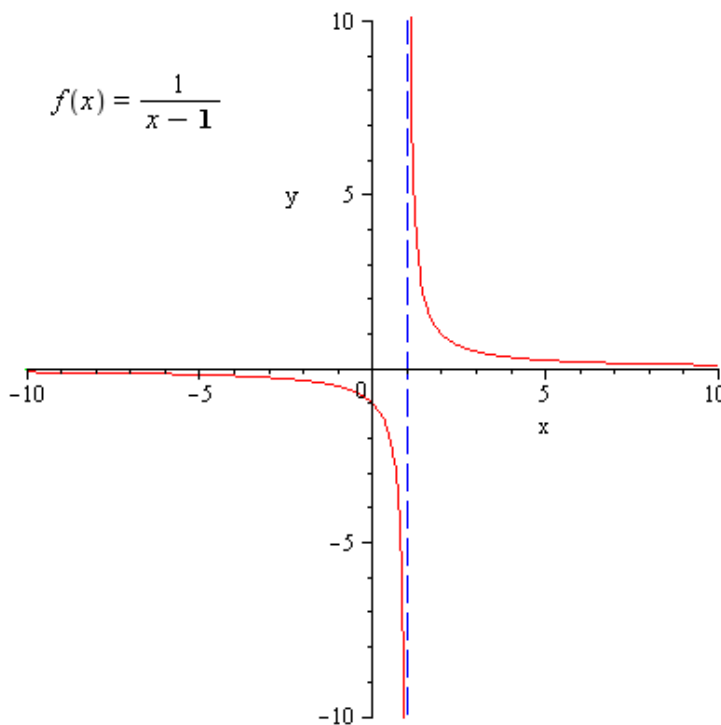
- "x" se aproxima a 2 tanto por la izquierda como por la derecha.
- $f(x)$ decrece sin cota o sin límite cuando "x" se aproxima a 2 por la izquierda y que crece sin cota o sin límite cuando "x" se aproxima a 2 por la derecha; este comportamiento se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty, \text{ cuando "x" se aproxima a 2 por la derecha}$$

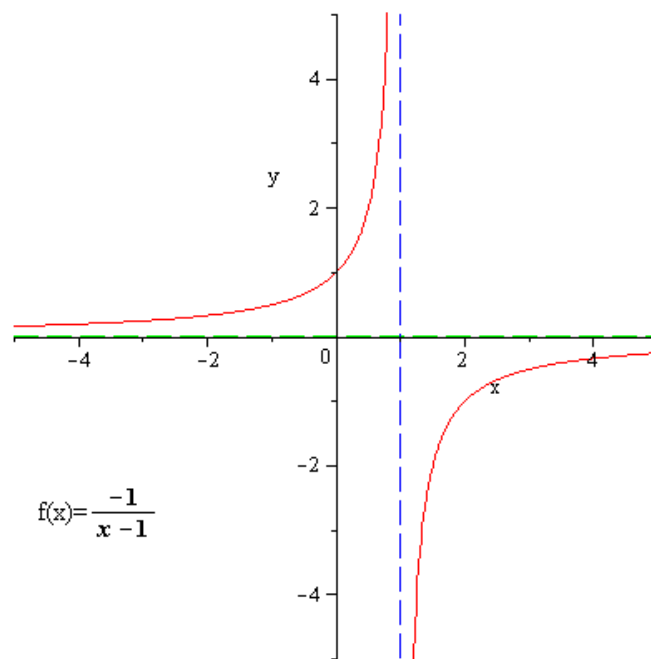
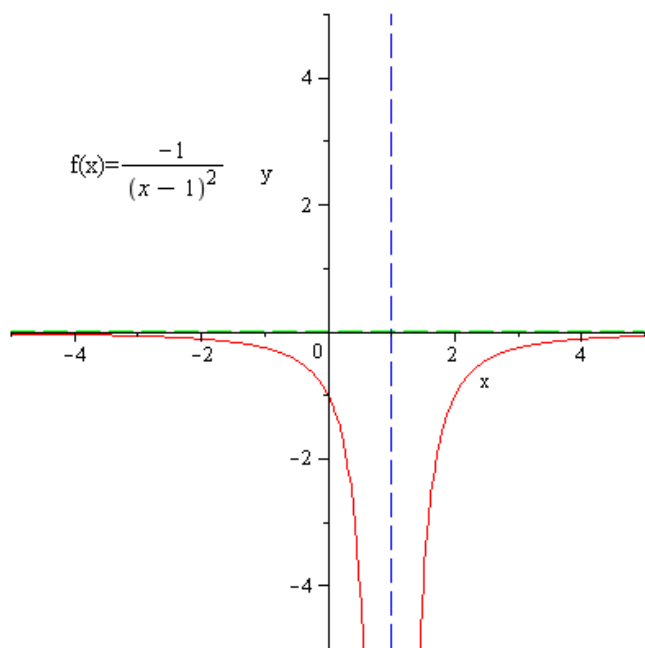
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty, \text{ cuando "x" se aproxima a 2 por la izquierda}$$

Asíntotas Verticales.

En las siguientes graficas se muestran varias funciones con asíntotas verticales en $x = 1$.



Limites donde interviene el infinito



Las funciones son:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ el límite por ambos lados tiende a ∞

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ el límite por ambos lados tiende a $-\infty$

Si se pudiera extender las gráficas anteriores, hacia el infinito positivo o negativo, se vería que ambas se acercan a la recta vertical $x = 1$; esta es una **asíntota vertical** de la gráfica f . Una asíntota vertical se define como: si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando “ x ” tiende a “ c ” por la derecha o por la izquierda, se dice que $x = c$.

Limites donde interviene el infinito

Teorema 10

Si f y g son funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a " c ". Si $f(c) \neq 0, g(c) = 0$ y existe un intervalo abierto que contiene a " c " tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$, entonces la gráfica de la función:

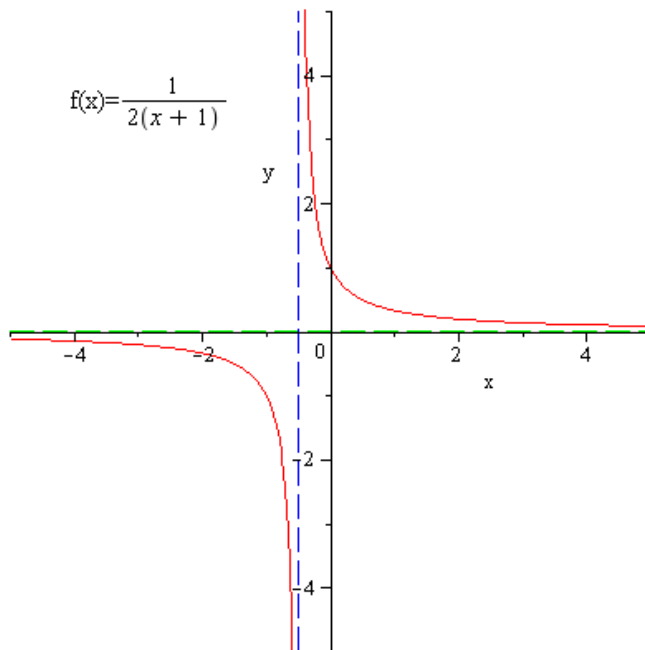
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ Tiene una asíntota vertical en } x \neq c$$

Es decir, el valor del numerador en $x = c$ no debe ser cero. Si tanto el numerador como el denominador son cero en $x = c$, se obtiene la forma indeterminada $0/0$, y no es posible establecer el comportamiento límite en $x = c$.

Ejemplo:

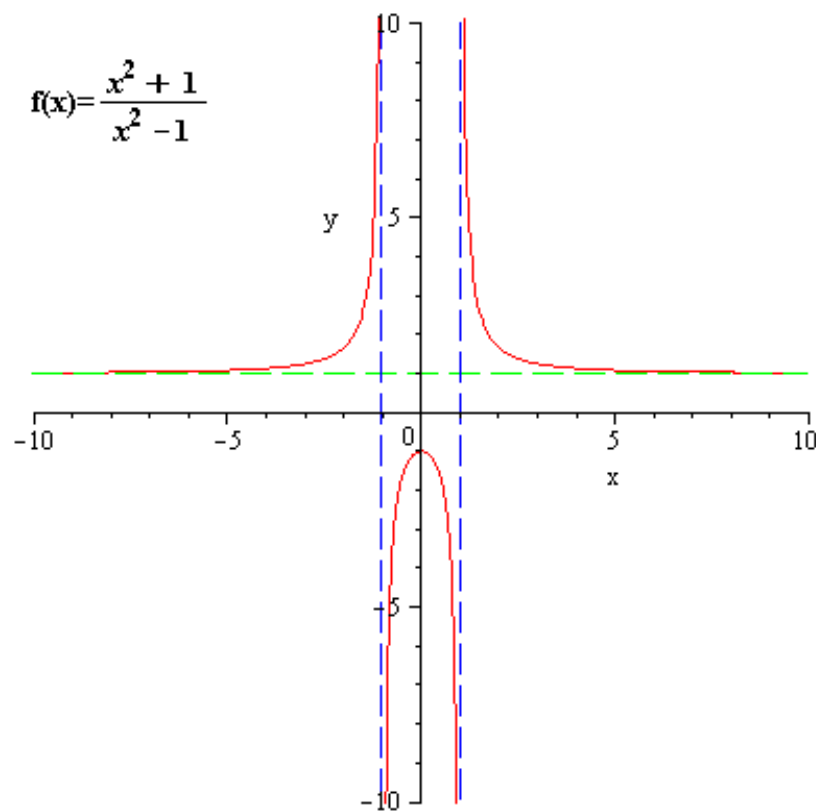
2) **Determine todas las asíntotas verticales de la gráfica de cada una de las siguientes funciones:**

- a) $f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$ cuando $x = -1$ el denominador es igual a 0 y el numerador no lo es, por lo que se concluye que $x = -1$ es una asíntota vertical.



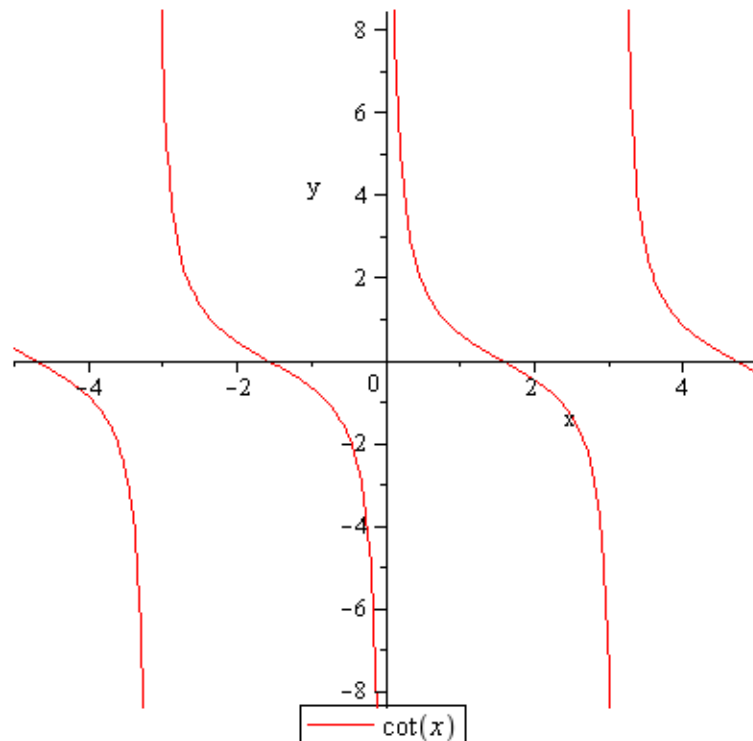
Límites donde interviene el infinito

- b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ el denominador se puede factorizar como: $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ en donde podemos ver que se anulan el (+1) y el (-1). Aplicando el teorema 10; observamos que el numerador nunca será cero y se concluye que la gráfica tiene dos asíntotas verticales



Limites donde interviene el infinito

- c) $f(x) = \cot x$ se puede expresar como: $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ aplicando el teorema 10, se concluye que las asíntotas verticales tienen lugar en todos los valores de "x" tales que $\sin x = 0$ y $\cos x \neq 0$, por lo cual la gráfica tiene infinitas asíntotas verticales.

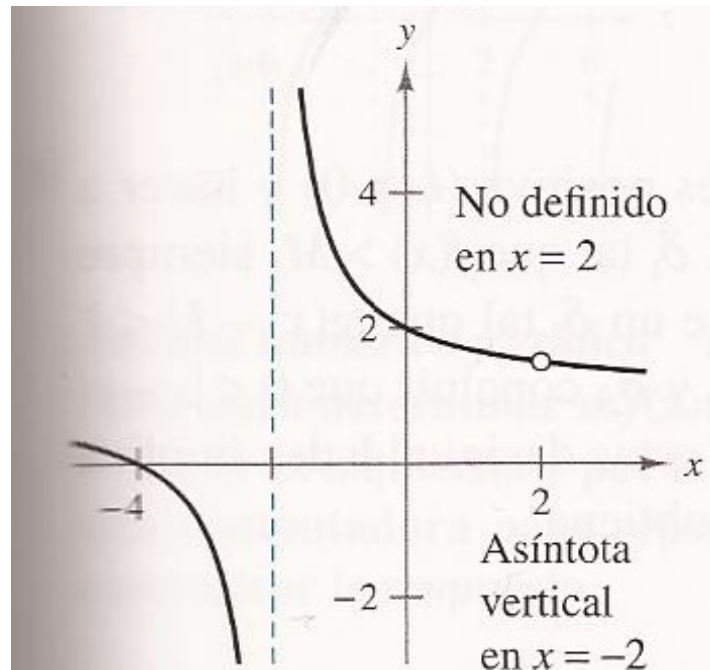


- 3) **Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica:** $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

Simplificando la ecuación resulta: $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+4)}{(x+2)}, x \neq -2$

Limites donde interviene el infinito

De acuerdo al teorema, concluimos que se tiene una asíntota vertical en $x = -2$. A partir de la gráfica:



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty$$

Observar que $x = 2$ no es una asíntota vertical.

4) Determinar los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

El denominador se hace cero cuando $x = 1$ y el numerador no se anula, por lo que asumimos que hay una asíntota en $x = 1$; por lo cual la gráfica tiende a ∞ y $-\infty$.

Limites donde interviene el infinito

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty$$

