

Límites por Incrementos

DEFINICIÓN

La derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a "x" es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ siempre que el límite exista}$$

La derivada $f'(x)$ también se le conoce como razón de cambio instantánea de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable x.

SÍMBOLOS

Los símbolos usados en las publicaciones de matemáticas para denotar la derivada de una función son:

$$f'(x), \frac{dy}{dx}, y', Dy, D_x y$$

Ejemplos:

A continuación realizaremos el método de derivación por incrementos (4 pasos).

a) Encontrar la derivada de $f(x) = x^2$

1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Primero debemos ubicar las funciones para la variable "x" y por cada "x" que se tenga tenemos que sustituirla por un $(x + \Delta x)$ y aplicarle la función correspondiente, en este caso tenemos que elevarla al cuadrado y desarrollar el binomio al cuadrado

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2$

Limites por Incrementos

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x (2x + \Delta x)$$

Se factoriza por factor

$$3. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Realizamos la división correspondiente

$$4. f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = (2x + 0) = 2x$$

Sustituimos el valor del límite

Por lo tanto, la derivada de la función $f(x) = x^2$ es igual a $f'(x) = 2x$

b) Encontrar la derivada de $f(x) = x^3$

$$1) f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

Desarrollo del binomio al

$$2) \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3$$

$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

Factorizamos

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$4) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = (3x^2 + 3x(0) + (0)^2) = 3x^2$$

c) Encontrar la derivada de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

$$1) f(x + \Delta x) = -(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1$$

Sustituimos en cada variable "x",
(x+Δx) y realizamos las operaciones

$$= -x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 4x + 4\Delta x + 1$$

Límites por Incrementos

$$\begin{aligned} 2) \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 4x + 4\Delta x + 1) - (-x^2 + 4x + 1) \\ &= -2x\Delta x - \Delta x^2 + 4\Delta x = \Delta x(-2x - \Delta x + 4) \end{aligned}$$

Reducción de términos semejantes y factorización

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(-2x - \Delta x + 4)}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 4$$

$$4) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2x - \Delta x + 4) = -2x - (0) + 4 = -2x + 4$$

Valor de una derivada

En un número especificado a , el valor de la derivada se denota por:

$$f'(a), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}, \quad y'(a)$$

Ejemplo:

Determine el valor de la derivada de $y = x^2$ en 5, es:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=5} = 2x|_{x=5} = 2(5) = 10$$

- El proceso de obtención de una derivada se llama diferenciación o derivación. Si $f'(a)$ existe, se dice que f es diferenciable en a .
- La operación de diferenciación con respecto a la variable x se representa mediante el símbolo d/dx .
- El dominio de f' es el conjunto de los números reales para los que el límite existe.

Revisa cada uno de los videos que explican los límites por incrementos ya vistos.