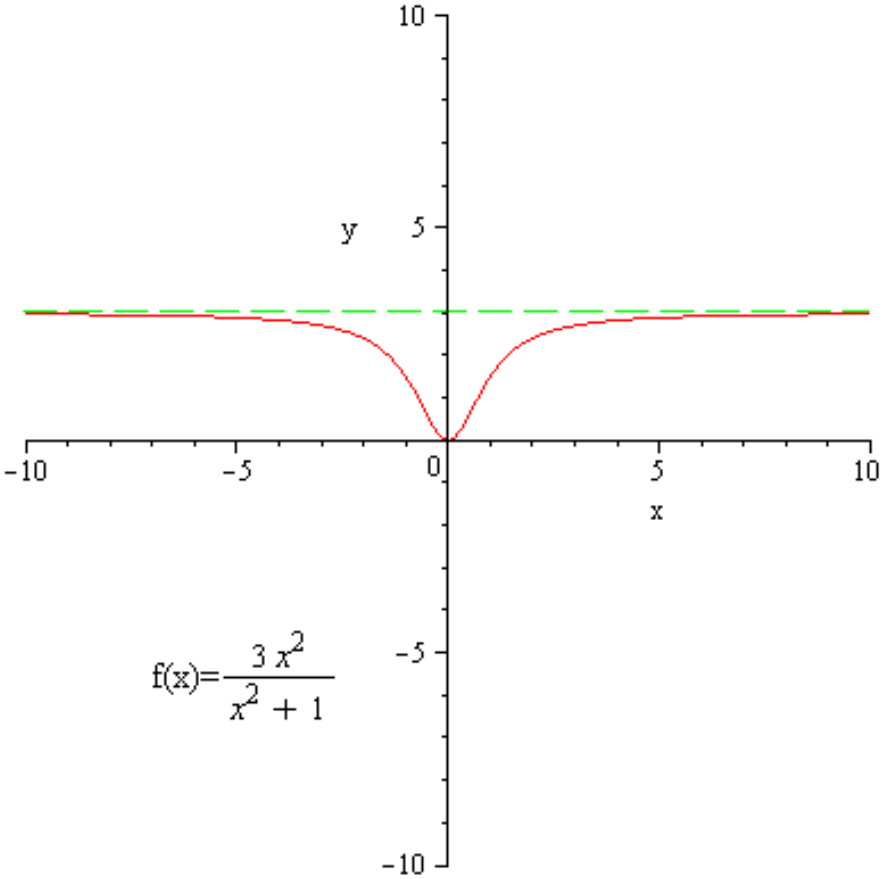
ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Consideremos la gráfica de $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$



Gráficamente puede que los valores de f (x) parecen aproximarse a 3 cuando x crece o decrece sin límite. Se puede llegar numéricamente a las mismas conclusiones, como se indica en la tabla

x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\rightarrow 3$

La tabla sugiere que el valor de f (x) se aproxima a 3 cuando x crece sin límite (→-∞). De manera similar, f (x) tiende a 3 cuando x decrece sin límite (x→ -∞). Esto límites en el infinito se denotan mediante $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

En la gráfica anterior de f, se aproxima a la recta y=L cuando x crece sin limite. La recta y=L recibe el nombre de la ***asíntota horizontal de la grafica de f.***

Definición de una asíntota horizontal: La recta y=L es una asíntota horizontal de la gráfica de f si

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L} \text{o} \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$$

Advierta que a partir de esta definición se concluye, la gráfica de una función de x se puede tener a lo mucho dos asíntotas horizontales.

Los límites al infinito tienen muchas de las propiedades estudiadas anteriormente. Por ejemplo, si existen tanto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$, entonces;

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) \text{y}$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right].$$

Se cumplen propiedades similares para límites en -∞. Cuando se evalúan límites al infinito, resulta de utilidad el siguiente teorema.

Límites donde Interviene el Infinito

TEOREMA 11

Si r es un número racional positivo y c es cualquier numero real, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0$. Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^2} = 0$.

Ejemplos:

1) Encontrar el límite $\mathbf{lim}_{x\to\infty}\left(\mathbf{5}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^2}}\right)$=

$$\lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\infty^2}$$

$$= 5 - 0 = 5.$$

2) Determinar el límite de $\mathbf{lim}_{x\to\infty} \frac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{x+1}}$

Solución: advertir que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \lim_{x\to\infty} (2x-1) \to \infty \lim_{x\to\infty} (x+1) \to \infty$$

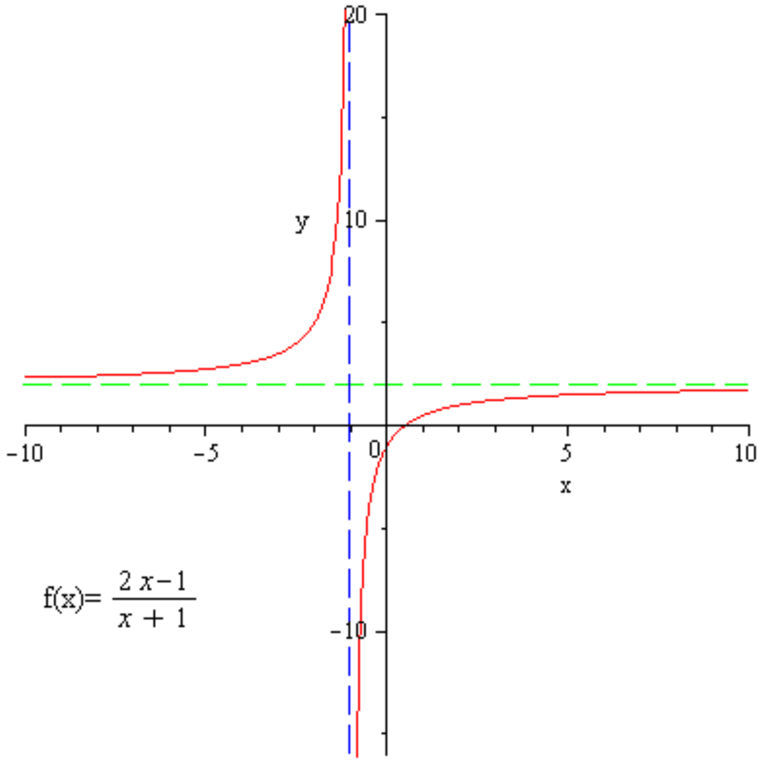
Esto produce una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver este problema es posible dividir tanto el numerador como el denominador entre x. Después de eso, el límite puede evaluarse como se muestra.

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1}$ $=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

De tal modo, la recta y=2 es una asíntota horizontal a la derecha. Al tomar el límite cuando $x \to -\infty$, puede verse que y=2 también es una asíntota horizontal hacia la izquierda. La gráfica de la función se ilustra en la siguiente gráfica:



3) **Determinar cada límite**:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}\ b)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}\ c)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}$$

Solución: en cada caso, el intento de evaluar el límite produce la forma indeterminada ∞/∞.

a) Dividir tanto el numerador como denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{x}\right)+\left(\frac{5}{x^2}\right)}{3+\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

b) Dividir tanto el numerador como denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+(\frac{5}{x^2})}{3+(\frac{1}{x^2})}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

c) Dividir tanto el numerador como denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+({}^{5}/{}_{x^2})}{3+\left({}^{1}/{}_{x^2}\right)}=\frac{\infty}{3}$$

Es posible concluir que el límite no existe porque el numerador aumenta sin límite, mientras el denominador se aproxima a 3.

Por lo tanto:

- Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
- Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

4) Función con dos asíntotas horizontales

Determinar cada límite.

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}\quad b)\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Solución:

a) Para $x>o$, es posible escribir $x=\sqrt{x^2}$. De tal modo, dividiendo tanto el numerador como el denominador entre x se obtiene.

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Y se puede tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

b) Para $x<0$, puede escribirse $x=-\sqrt{x^2}$. De manera que al dividir tanto el denominador como el numerador entre x se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Y es posible tomar el límite de la siguiente manera

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{-\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$