Problemas de Aplicación

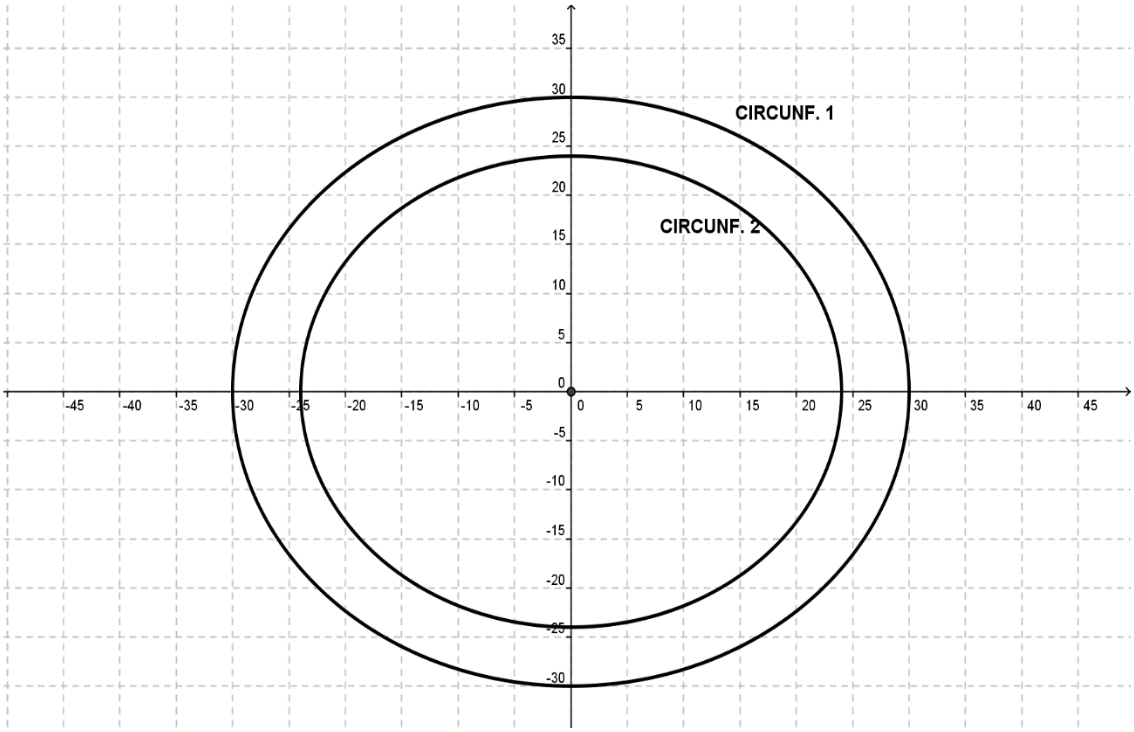
Ahora ya sabes que la circunferencia queda definida por un punto llamado centro y la distancia de este a cualquiera de los puntos que la define llamada radio, vamos a analizar algunos ejemplos de aplicación.

Ejercicios 1

Una pista circular está limitada por dos circunferencias concéntricas, al ubicarlas en un plano cartesiano, el centro coincide con el origen, el diámetro de la exterior mide $30\ m$ y el de la interior 24 . ¿Cuál es la ecuación que las define y cuántos metros tienen más la primera que la segunda circunferencia? Grafícalas.

SOLUCIÓN

Como son concéntricas, esto quiere decir que tienen el mismo centro y quedan ubicadas así:



Puedes hacer la gráfica en el cuaderno usando un compás, o bien usar Geogebra. Como ambas tienen el centro en el origen, las ecuaciones de las circunferencias están dadas por la fórmula:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

C1:

$$x^2 + y^2 = (30)^2$$
$$x^2 + y^2 = 900$$

C2:

$$x^2 + y^2 = (24)^2$$
$$x^2 + y^2 = 576$$

Los perímetros de ambas para comparar y dar la respuesta a la pregunta:

$$C_1 = 2\pi r \qquad C_1 = 2\pi r$$

$$C_1 = 2\pi(30) \qquad C_1 = 2\pi(24)$$

$$C_1 = 188.49\text{ m} \qquad C_1 = 150.79\text{ m}$$

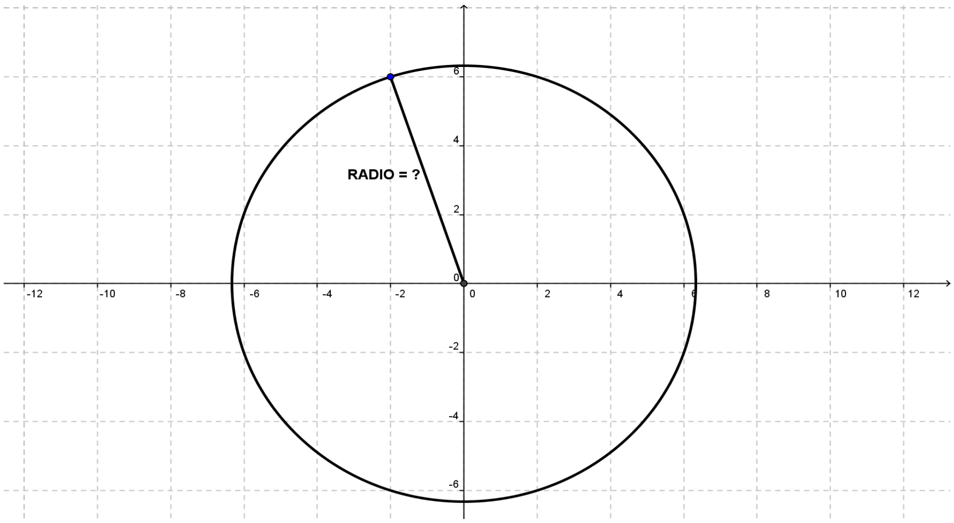
La diferencia entre ambos es 37.69 m

Ejemplo 2

Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen y pasa por el punto $(-2, 6)$.

Solución

Primero graficamos para darnos idea de lo que necesitamos hacer:



Para poder establecer la ecuación de la circunferencia, necesitamos conocer el centro y el radio, el centro está en el origen $(0,0)$ y el radio que no conocemos podemos calcularlo con la distancia entre dos puntos; en este caso, sería entre $(0, 0)$ y $(-2, 6)$:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 36}$$
$$r = \sqrt{40}$$

Como el centro está en el origen, la ecuación que la define está dada por:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 40$$

Ejemplo 3

Encontrar la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria y general, cuyo centro es la intersección de las rectas $3x + 2y - 4 = 0$ y $x + 3y + 1 = 0$ y es tangente al eje "x".

SOLUCIÓN

De Matemáticas I recordarás que cuando tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, el punto donde se cruzan, se encuentra resolviendo el sistema, podemos aplicar el método de suma – resta para encontrar este punto, el cual representará el centro de la circunferencia. Una vez conocida la coordenada del centro, la ubicamos en el plano y hacemos la circunferencia que sea tangente al eje "x", para conocer el radio de la misma y de esta manera establecer la ecuación que la define.

$$3x + 2y - 4 = 0$$

$$x + 3y + 1 = 0$$

Multiplicando la segunda ecuación por (-3) y sumándola con la primera ecuación obtenemos:

$$x + 3y + 1 = 0(-3)$$

$$\begin{array}{r} -3x - 9y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$0 - 7y - 7 = 0$$

Despejando “y”:

$$-7y = 7$$

$$y = \frac{7}{-7} = -1$$

Sustituyendo $y = -1$ en la ecuación 2: $x + 3y + 1 = 0$

$$x + 3(-1) + 1 = 0$$

$$x - 3 + 1 = 0$$

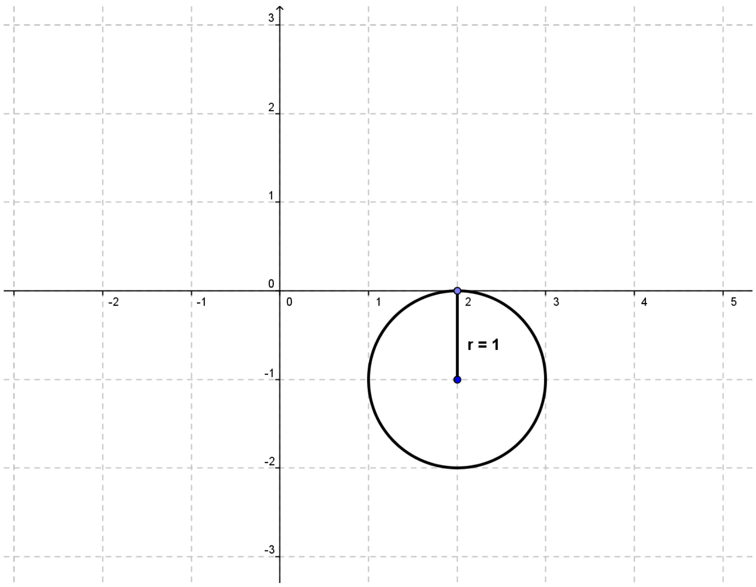
Despejando x:

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Por lo que la coordenada buscada que corresponde al centro es: $C(2, -1)$

Graficando, como es tangente al eje “x”, debe cruzar en un punto el eje con la circunferencia, por lo que quedaría ubicada así:



De aquí podemos deducir que el radio es igual a 1.

La ecuación de la circunferencia con centro $(2,-1)$ y radio uno estará dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 1$$

Ecuación de la forma ordinaria: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Para la ecuación de la forma general, desarrollamos los binomios y simplificamos:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

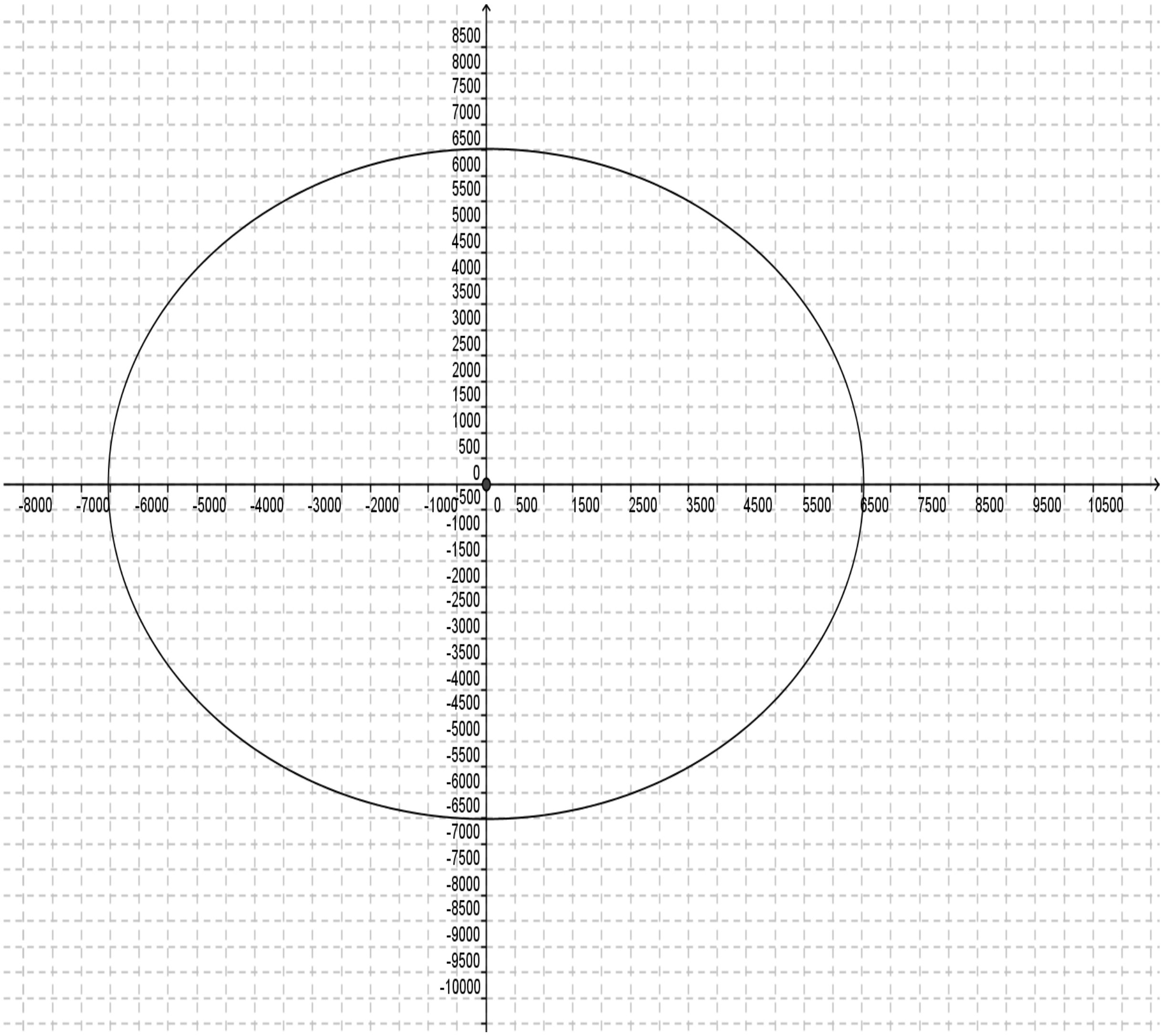
Ejemplo 4

Un satélite fue puesto en órbita a 150 km de su superficie, si la trayectoria del satélite es circular, y el diámetro de la Tierra es de $12{,}756.8$ km, ¿cuál es la ecuación que describe el movimiento del satélite?

SOLUCIÓN

Podemos ubicar el centro de la Tierra en el origen, de este a la superficie de la Tierra hay una distancia de $\frac{12{,}756.8}{2}$ km, que serían $6{,}378.4$ km (pues los $12{,}756.8$ km corresponden al diámetro, la mitad sería el radio). Si le sumamos los 150 km a los que se encuentra el satélite, obtenemos una distancia total de $6{,}528.4$ km. Esta distancia corresponde al radio de la circunferencia que describe el satélite alrededor de la tierra.

Graficando:



Con el centro en $(0,0)$ y el radio de $6{,}528.4 \text{ km}$, la ecuación queda:

$$x^2 + y^2 = (6{,}528.4)^2$$

$$x^2 + y^2 = 42{,}620{,}006.56$$