Ecuación General

Cuando conocemos la ecuación de la elipse de la forma ordinaria, al trabajarla algebraicamente podemos llegar a la ecuación de la forma general que es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En la cual A y C deben ser del mismo signo (los dos positivos o los dos negativos), además $A \neq C$ porque si $A = C$, entonces el lugar geométrico es una circunferencia.

Ejemplos:

Dadas las ecuaciones de las elipses de la forma ordinaria, obtén las ecuaciones de la forma general.

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 9 y al 25, este sería el 225.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$225\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1\right]$$

$$225x^2 + 9y^2x^2 = 225$$

$$225x^2 + 9y^2x^2 - 225 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 25, C = 9, D = 0, E = 0, F = -225$

a) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 49 y al 4, este sería el 196.

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$196\left[\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1\right]$$

$$4x^2+49y^2=196$$

$$4x^2+49y^2-196=0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A=4, C=49, D=0, E=0, F=-196$

a) $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

Solución

Buscamos un número que divida al 16 y al 9 que sería 144, enseguida multiplicamos toda la ecuación por este número, desarrollamos los binomios, después multiplicamos y simplificamos igualando a cero la ecuación resultante.

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$$\left[144\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1\right]$$

$$9(x-4)^2+16(y+1)^2=144$$

$$9(x^2-8x+16)+16(y^2+2y+1)=144$$

$$9x^2-72x+144+16y^2+32y+16-144=0$$

$$9x^2+16y^2-72x+32y+16=0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 9, C = 16, D = -72, E = 32, F = 16$

a) $\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$

Solución

Buscamos un número que divida al 4 y al 16 que sería 16, enseguida aplicamos el mismo procedimiento que para el ejemplo anterior.

$$\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$$

$$16\left[\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1\right]$$

$$4(x+6)^2 + (y+5)^2 = 16$$

$$4(x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 10y + 25) = 16$$

$$4x^2 + 48x + 144 + y^2 + 10y + 25 - 16 = 0$$

$$4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 4, C = 1, D = 48, E = 10, F = 153$.

Ahora, ¿qué pasa si lo que tenemos es la ecuación de la forma general y deseamos saber cuál es la ecuación de la forma ordinaria?

El procedimiento es agrupar lo términos que contienen la misma variable, factorizar y obtenemos la ecuación pedida.

Para factorizar lo hacemos completando el trinomio cuadrado perfecto agregando a la ecuación la mitad de "D" elevada al cuadrado así como la de "E", y agregando estas mismas cantidades del lado derecho de la ecuación para que no se altere la misma.

Si los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero antes de completar el trinomio, es necesario factorizar los términos Ax^2, Dx y Cy^2, Ey .

Solución

Ejemplo 1

Dadas las ecuaciones de la forma general, obtenga la ecuación de la forma ordinaria.

a) $4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$

$$4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$$

$$4x^2 + 48x + y^2 + 10y = -153$$

$$4(x^2 + 12x + (6)^2) + (y^2 + 10y + (5)^2) = -153 + 4((6)^2) + (5)^2$$

$$4(x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 10y + 25) = -153 + 144 + 25$$

$$4(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

$$\frac{4(x + 6)^2 + (y + 5)^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\frac{(x + 6)^2}{4} + \frac{(y + 5)^2}{16} = 1$$

Que si observas es la misma ecuación del ejemplo (d) del ejercicio anterior.

a) $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$

Solución

En este caso, la ecuación no tiene el término Dx y Ey por lo que deducimos que se trata de una elipse con centro en el origen, así que el procedimiento se reduce pues solo hay que pasar el término F al segundo miembro de la ecuación y dividir toda la ecuación entre este número para que quede igualada a 1.

$$25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$$
$$25x^2 + 4y^2 = 100$$
$$\frac{25x^2 + 4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

b) $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

c)

Solución

Este ejemplo es igual que el del inciso (a) por lo que se resuelve igual.

$$3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$$

$$3x^2 - 24x + 2y^2 + 12y = -60$$

$$3(x^2 - 8x) + 2(y^2 + 6y) = -60$$

$$3(x^2 - 8x + (4)^2) + 2(y^2 + 6y + (3)^2) = -60 + 3(4)^2 + 2(3)^2$$

$$3(x^2 - 8x + 16) + 2(y^2 + 6y + 9) = -60 + 48 + 18$$

$$3(x - 4)^2 + 2(y + 3)^2 = 6$$

$$\frac{3(x - 4)^2 + 2(y + 3)^2}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{(x-4)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$$

a) $9x^2+y^2-9=0$

Solución

Como la ecuación no tiene Dx ni Ey, se procede igual que el ejemplo del inciso (b).

$$9x^2+y^2-9=0$$

$$9x^2+y^2=9$$

$$\frac{9x^2+y^2}{9}=\frac{9}{9}$$

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$$