Ecuación General

En Matemáticas I estudiaste los productos notables y aprendiste a desarrollar el binomio al cuadrado. Recordemos un poco este tema, ya que si observas la ecuación que obtuvimos para identificar a una circunferencia que se encuentra con el centro fuera del origen, incluye dos binomios al cuadrado: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

NOTA: de los siguientes binomios al cuadrado copia en una hoja de tu cuaderno solo los binomios al cuadrado y trata de resolverlos sin ver las respuestas, evalúa tu trabajo al comparar los resultados con los que se te indican.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-4)^2=a^2-8a+16$$

$$(5-b)^2=25-10b+b^2$$

$$(x+3)^2=x^2+6x+9$$

$$(m-1)^2=m^2-2m+1$$

$$(8+q)^2=64+16q+q^2$$

$$(y-9)^2=y^2-18y+81$$

$$(f+4)^2=f^2+8f+16$$

Ya que hemos recordado un poco, analicemos la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen, la cual está dada por: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Si desarrollamos los binomios obtenemos:

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

Reacomodando términos e igualando a cero:

$$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$$

Como h, k y r son números reales se pueden agrupar como $F = h^2 + k^2 - r^2$, si a $-2h = D$ y a $-2k = E$, queda:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de la circunferencia de la forma general.

EJEMPLO 1

Obtén la ecuación de la circunferencia de la forma general:

a) $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 81$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 6y + 9 - 81 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 14x + 6y + 49 + 9 - 81 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 14x + 6y - 23 = 0$$

b) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 100 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 - 100 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 87 = 0$$

c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 + 9 - 16 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$$

d) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 144$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 - 144 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 + 4 - 144 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 124 = 0$$

EJEMPLO 2

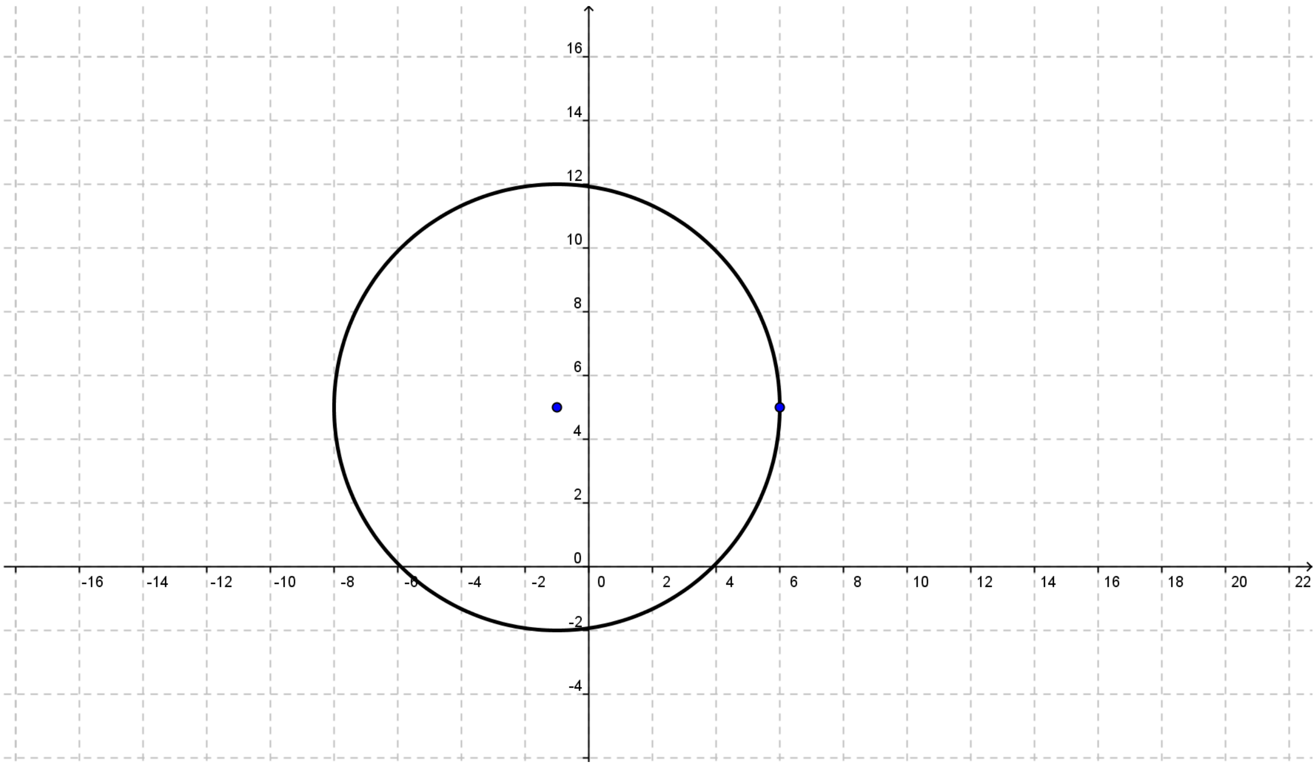
Dada la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria, establece la ecuación de la forma general, identifica el centro y el radio y gráfica.

a) $(x+\ 1)^2+(y\ -\ 5)^2=49$

$$x^2+2x+1+y^2-10y+25-49=0$$
$$x^2+y^2+\ 2x-10y+1+25-49=0$$
$$x^2+y^2+2x-10y-23=0$$

$C(-1,5)$ y $r=7$

Gráfica:



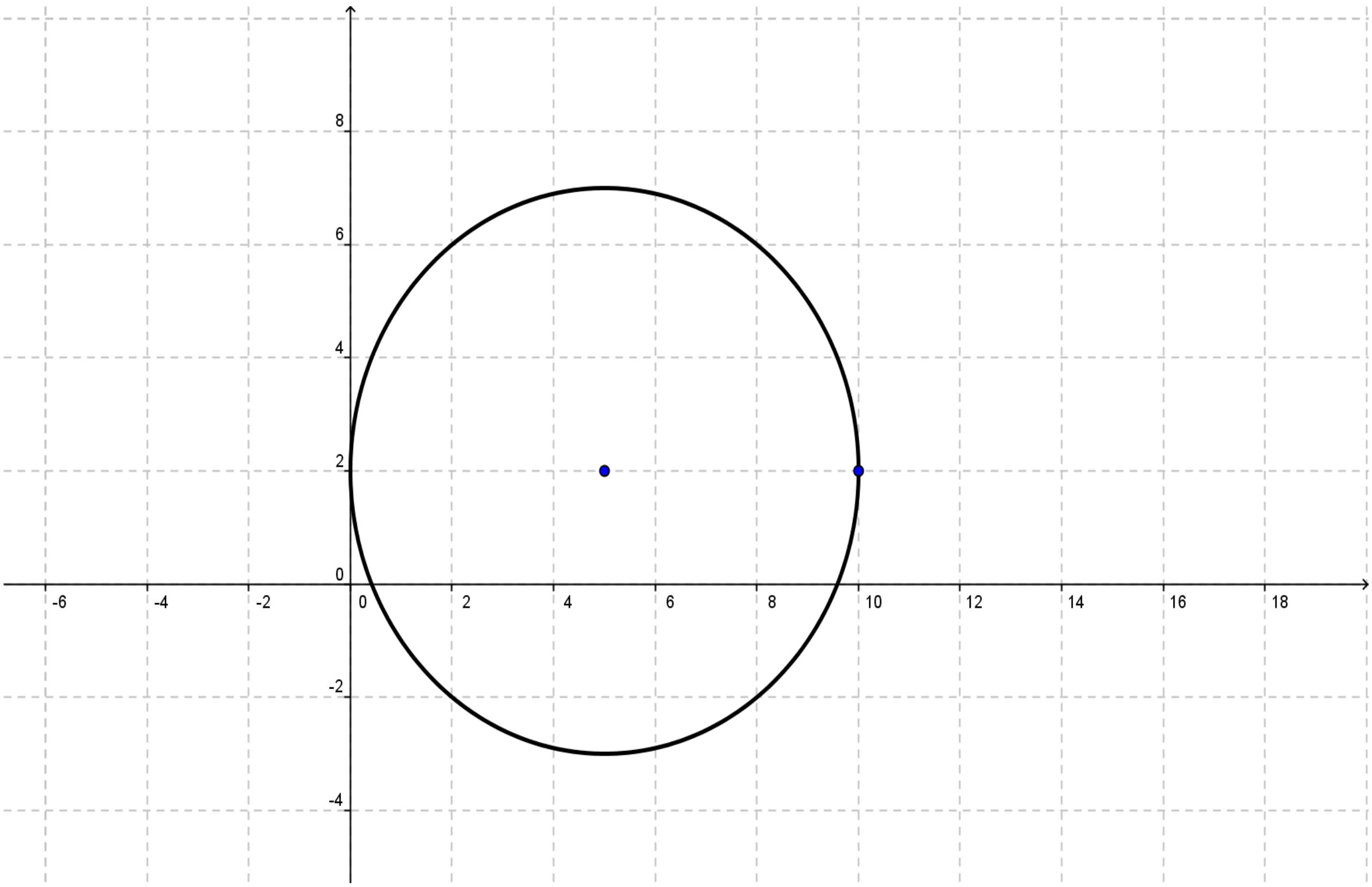
Ecuación General

a) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 + 4 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$

$C(5, 2)$ y $r = 5$

Gráfica:

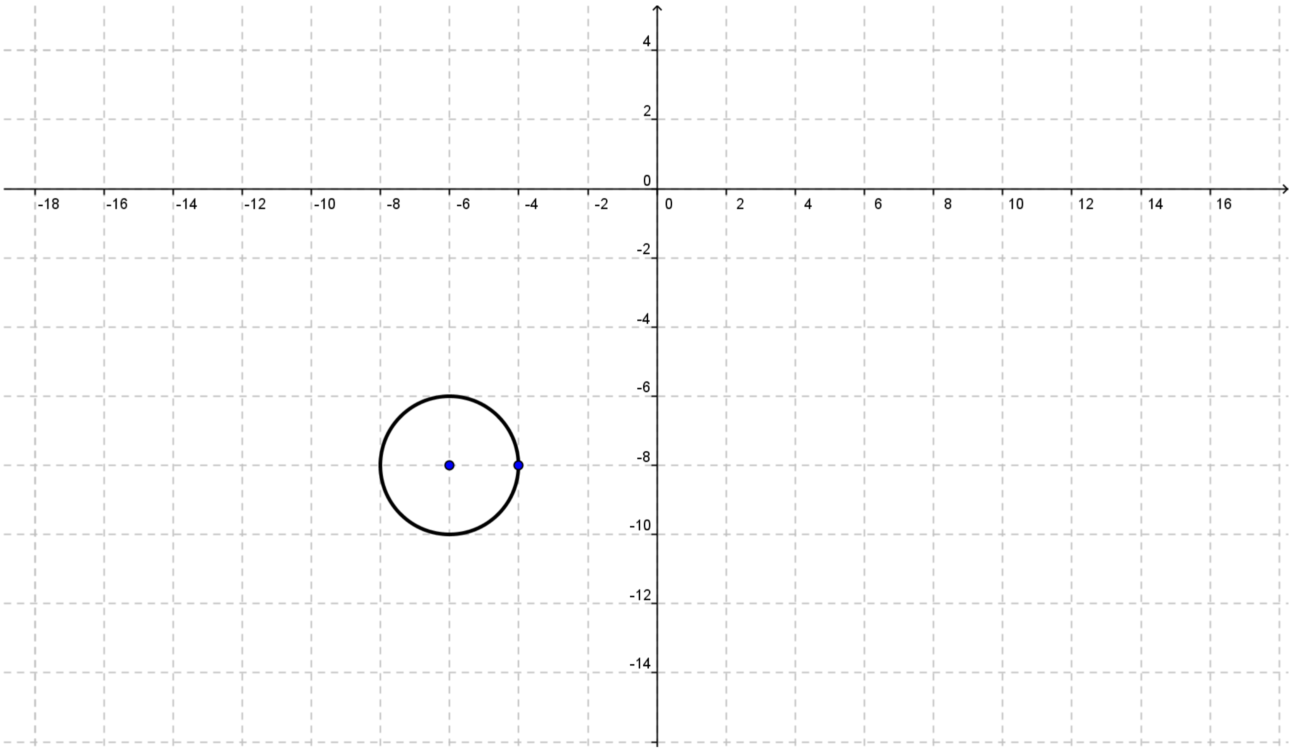


b) $(x + 6)^2 + (y + 8)^2 = 4$

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 + 16y + 64 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 12x + 16y + 36 + 64 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 12x + 16y + 98 = 0$$

$C(-6, -8)$ y $r = 2$

Gráfica:



Y cuando no conocemos el centro ni el radio, sino solo la ecuación de forma general, ¿qué hacemos?

Algunas veces tenemos la ecuación de la forma general y no conocemos el centro y el radio y nos piden graficarla, para esto la ecuación de la forma general se factoriza y se llega a las siguientes fórmulas que nos servirán para calcular las coordenadas de centro y la longitud del radio:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

EJEMPLO 1

Dada la ecuación de la circunferencia de la forma general, calcula el centro y el radio y gráfica.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 23 = 0$

De aquí podemos observar que si lo comparamos con:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$D = 2, E = -10 \text{ y } F = -23$$

Sustituyendo en las fórmulas:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-10}{2}\right)$$

$$C(-1, 5)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(2)^2 + (-10)^2 - 4(-23)}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{4 + 100 + 92}}{2}$$

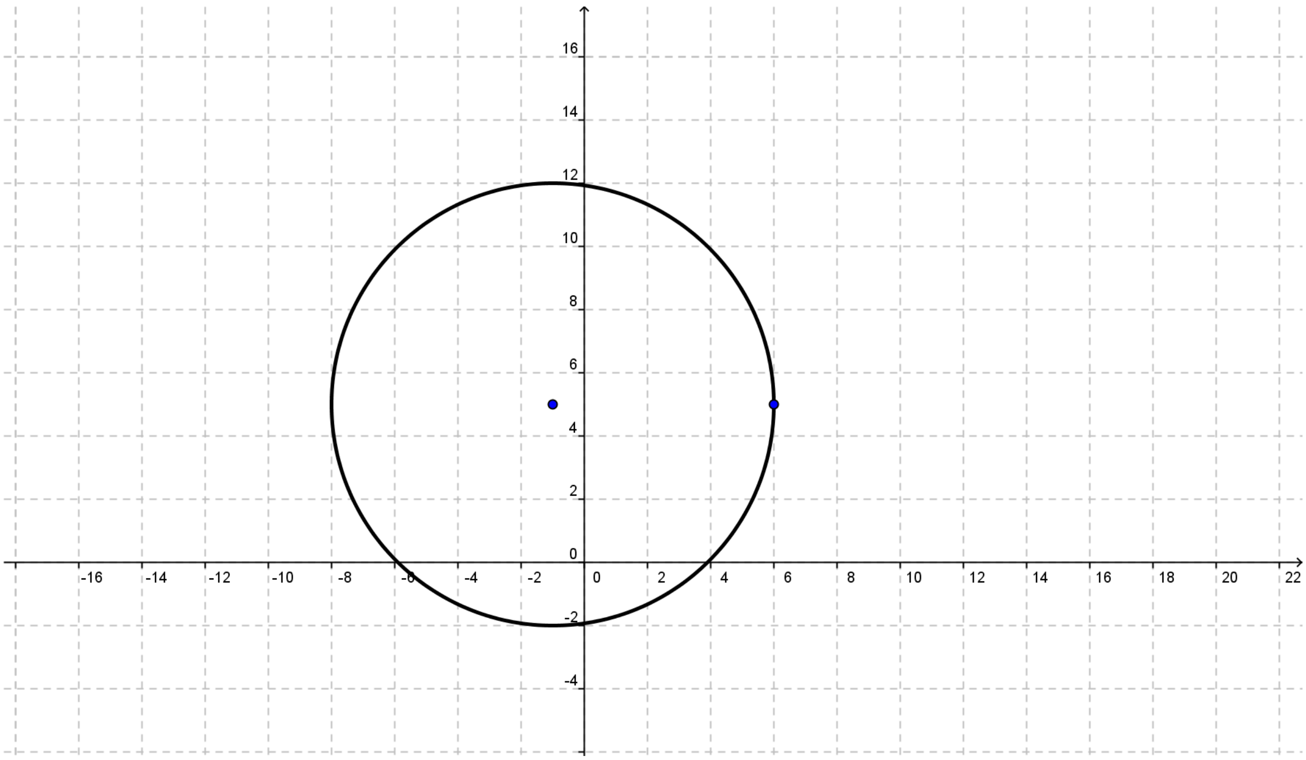
$$r = \frac{\sqrt{196}}{2}$$

$$r = \frac{14}{2}$$

$$r = 7$$

$C(-1, 5)$ y $r = 7$

Gráfica:



b) $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$

De aquí podemos observar que si lo comparamos con:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$D = -8, E = 0 \text{ y } F = 15$$

Ecuación General

Sustituyendo en las fórmulas

$$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{-8}{2},-\frac{0}{2}\right)$$

$$C(4,0)$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

$$r=\frac{\sqrt{(-8)^2+(0)^2-4(15)}}{2}$$

$$r=\frac{\sqrt{64+0-60}}{2}$$

$$r=\frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$r=\frac{2}{2}$$

$$r=1$$

$C(4,0)$ y $r=1$ gráfica: