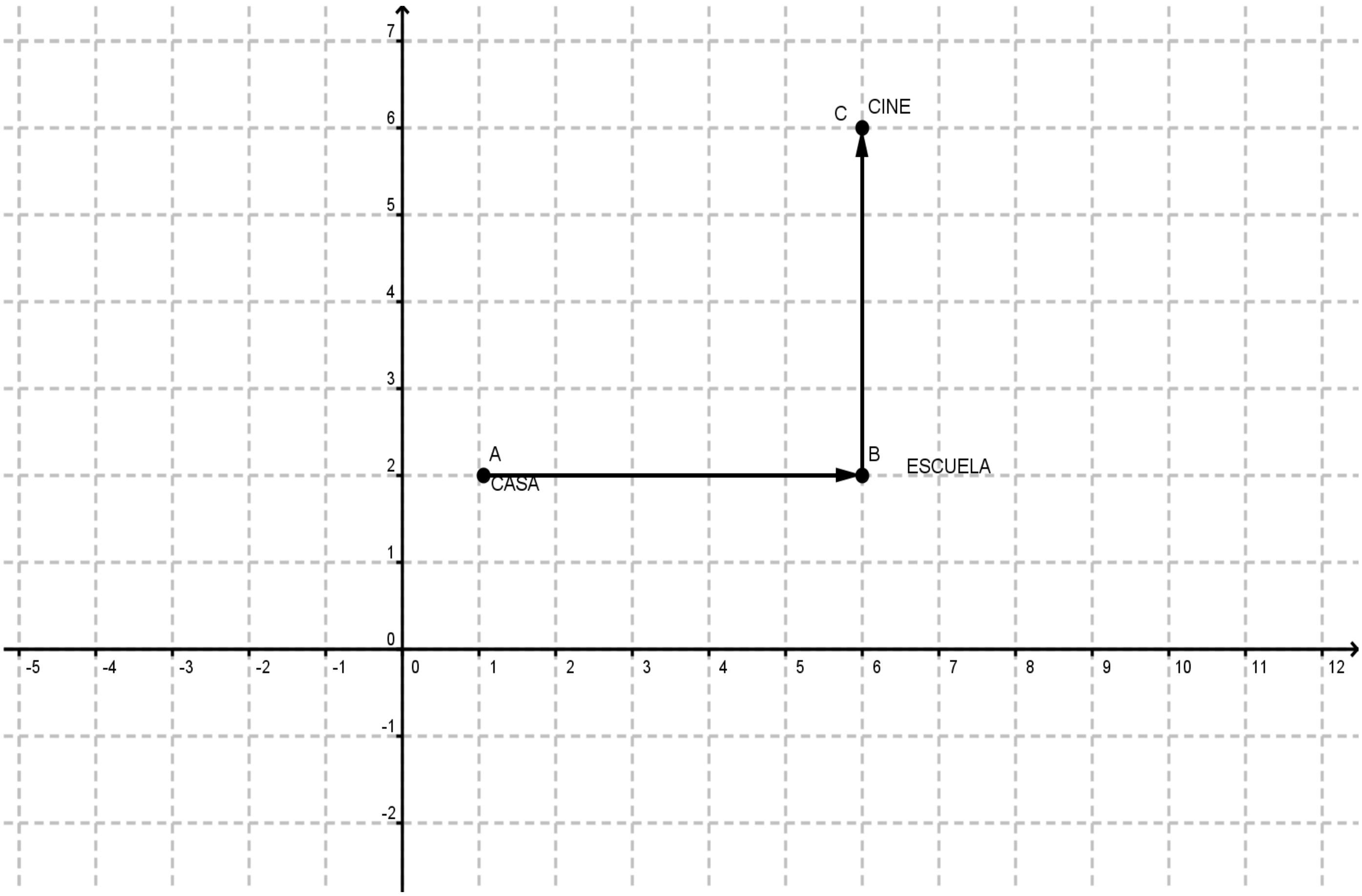
Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Ejemplo 1

Lucía se transporta en bicicleta de su casa (A) hasta la escuela donde estudia (B). Al salir de la escuela, acompaña a sus amigas al cine (C). ¿Cuál es la distancia total que recorre? Suponga que cada unidad es equivalente a 10 metros.



Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Solución

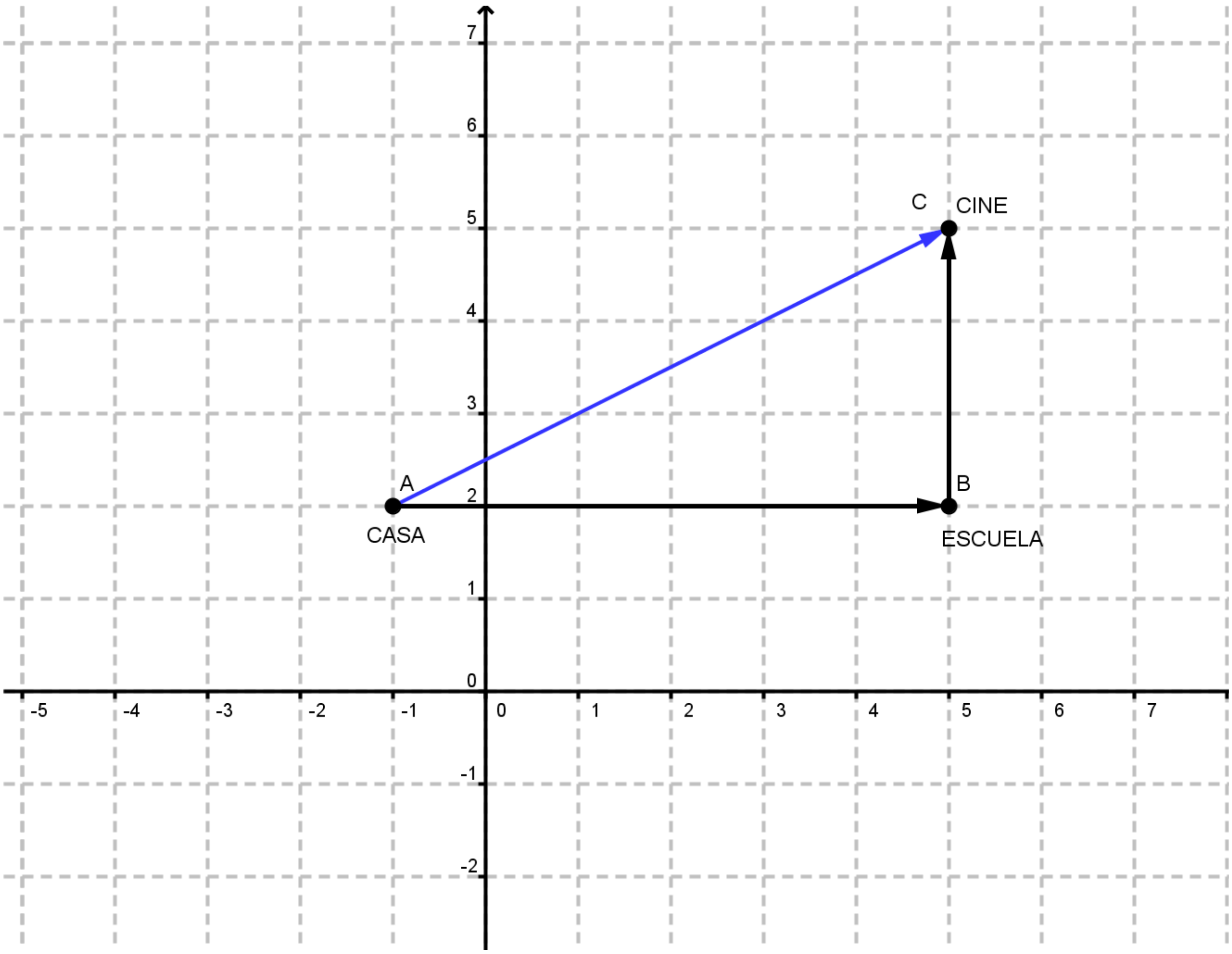
- Anotando primero las coordenadas de cada punto tenemos: $A(1,2)$, $B(6,2)$ y $C(6,6)$
- Si consideramos la distancia de la casa (A) a la escuela (B) observamos que hay 5 unidades de diferencia, como cada unidad equivale a 10 metros la distancia recorrida de A hacia B es de 50 m
- De la escuela (B) al cine (C) hay 4 unidades de diferencia por lo tanto corresponde a 40 m
- El recorrido total será de:
  De A a B $= 50\text{ m}$
  De B a C $= 40\text{ m}$
  Recorrido total $50\text{ m} + 40\text{ m} = 90\text{ m}$

Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Ejemplo 2

Retomando el ejemplo anterior pero cambiando las coordenadas A, B y C. El recorrido sería el siguiente:

Solución



Las coordenadas serían: $A(-1,2)$; $B(5,2)$ y $C(5,5)$

Si observas la gráfica, podemos ver que se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y la hipotenusa está formada por la longitud $\overline{AC}$.

Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Del teorema de Pitágoras sabemos que:

$$(\mathrm{Hip})^2 = (\mathrm{cat})^2 + (\mathrm{cat})^2$$

Sustituyendo la información se obtiene:

$$(\overline{\mathrm{AC}})^2 = (\overline{\mathrm{AB}})^2 + (\overline{\mathrm{BC}})^2$$

$(\overline{\mathrm{AC}})^2 = (60\ \mathrm{m})^2 + (30\ \mathrm{m})^2$

$(\overline{\mathrm{AC}})^2 = 3\,600\ \mathrm{m}^2 + 900\ \mathrm{m}^2$

$(\overline{\mathrm{AC}})^2 = 4\,500\ \mathrm{m}^2$

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{4500\ \mathrm{m}^2}$

$\overline{\mathrm{AC}} = 67.08\ \mathrm{m}$

Esta es la longitud del recorrido de Lucía de su casa al cine directamente.

El ejemplo anterior ayuda a visualizar la forma de obtener la distancia entre dos puntos cualesquiera en un plano cartesiano. Si la distancia es entre puntos alineados horizontalmente $(\overline{\mathrm{AB}})$, podemos observar que para calcular la distancia entre los puntos A y B solo basta restar los valores de la abscisa "x" de ambos puntos: $\mathrm{A}(-1, 2)$ y $\mathrm{B}(5,2)$:

$$\overline{\mathrm{AB}} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{\mathrm{AB}} = |5 - (-1)|$$

$\overline{\mathrm{AB}} = 6$; como cada unidad equivale a $10\ \mathrm{m}$ $\overline{\mathrm{AB}} = 60\ \mathrm{m}$

Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Para calcular la distancia entre puntos alineados verticalmente como es el caso de $\overline{BC}$, solo tenemos que restar los valores de las ordenadas "y" de ambos puntos: $B(5,2)$ y $C(5,5)$

$$\overline{BC} = |y_2 - y_1|$$
$$\overline{BC} = |5 - 2|$$

$\overline{BC} = 3$; Como cada unidad equivale a 10 m $\overline{BC} = 30\text{ m}$

Sabemos que $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ corresponden a los catetos en el triángulo rectángulo que se forma, por lo que aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que sustituyendo la información se obtiene:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$$
$$(\overline{AC})^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

Los valores absolutos son para que las longitudes sean positivas; también cuando se eleve al cuadrado cada término, el resultado será positivo, así que para hacerlo más práctico, se tomarán únicamente los cuadrados, como sigue:

$$(\overline{AC})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Ahora se despeja la $\overline{AC}$ sacando raíz.

Habrá que recordar que hay dos posibles resultados al sacar una raíz, solo que consideraremos el resultado positivo, dado que la distancia no es negativa.

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

De donde obtenemos la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Ejemplo 3

Comprobar la fórmula anterior usando las coordenadas de $A(-1,2)$ y $C(5,5)$ que corresponden a los puntos de la casa de Lucy (A) y el cine (C).

Solución

$$\begin{array}{ll} A(-1,2) & C(5,5) \\ A\ (x_1, y_1) & C(x_2, y_2) \end{array}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(5 - (-1)\right)^2 + (5 - 2)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6\ \mathrm{m})^2 + (3\ \mathrm{m})^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{36\ \mathrm{m}^2 + 9\ \mathrm{m}^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{45\ \mathrm{m}^2}$$

$$\overline{AC} = 6.708\ \mathrm{m}$$

Como cada unidad equivale a $10\ \mathrm{m}$, la distancia entre $\overline{AC} = 6.708\ \mathrm{m}$, el cual es el mismo resultado sin usar la fórmula.

Ejemplo 4

Graficar y calcular la longitud del segmento que une a los puntos $A(1,2)$ y $B(6,5)$.

Longitud de un segmento determinado por dos puntos

Ejemplo 4
Graficar y calcular la longitud del segmento que une a los puntos $A(1,2)$ y $B(6,5)$.

Solución

$$A(1,2) \qquad B(6,5)$$
$$A\ (x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25+9}$$

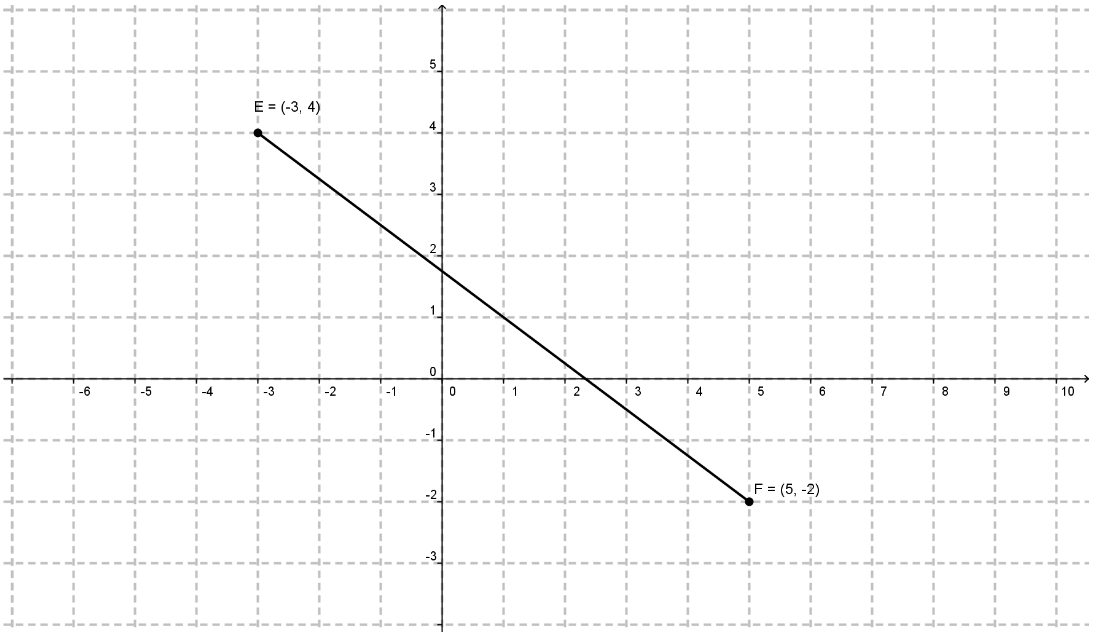
$$\overline{AB} = \sqrt{34}$$

$$\overline{AC} = 5.83 \text{ Unidades}$$

Ejemplo 5

Graficar y calcular la longitud del segmento que une a los puntos $\mathrm{E}(-3,4)$ y $\mathrm{F}(5,-2)$.

Solución



$$\mathrm{E}(-3,4) \qquad \mathrm{F}(5,-2)$$
$$\mathrm{E}(x_1,y_1) \qquad \mathrm{F}(x_2,y_2)$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{\left(5-(-3)\right)^2+(-2-4)^2}$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{(8)^2+(-6)^2}$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{64+36}$$

$$\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{100}$$

$$\overline{EF} = 10 \text{ Unidades}$$