Permutaciones con Repeticiones

Con frecuencia se desea saber el número de permutaciones de objetos, de los cuales algunos son iguales. Para ello utilizaremos el siguiente patrón:

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales..., n_r son iguales es: $\frac{n!}{n1\,!n2\,!.....nr!}$ es decir: $Pr_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x!y!z!}$

EJEMPLO:

1) Una embarcación es decorada por medio de 7 banderas, las cuales son colocadas en línea vertical. El capitán procura ordenarlas de diferente manera cada día. Si de las 7 banderas, 2 son rojas, 2 son azules y las otras 3 son verdes, ¿durante cuántos días podrá el capitán decorar su nave de diferente manera utilizando las 7 banderas?

En este caso tendremos $n = 7$ banderas, de las cuales algunas se repiten: rojas$= 2$, azules$= 2$ y verdes$= 3$; el caso corresponde a permutaciones con repeticiones y el patrón a utilizar es:

$$\frac{n!}{n1\,!\,n2\,!\dots nr!} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{2!\times2!\times3!} = \frac{840}{4} = 210$$

Por lo que el capitán de la embarcación podrá decorar su nave durante 210 días de manera diferente.

Nota: estas operaciones las puedes realizar utilizando tu calculadora científica, basta con que localices la tecla $x!$ que es el factorial del número; dependiendo del modelo de la calculadora científica, pudiera ser que la encontraras como $n!$, o bien que tengas que utilizar el shift para activar la función.

En este caso, para realizar con la calculadora la operación $= \frac{7!}{2!\times2!\times3!}$ pudiese ser de las siguientes formas:

Forma	
1)	Teclea en tu calculadora científica 7 y la tecla $x!$ y el signo de igual y obtendrás: 5040. Partiendo de cero, realiza con la calculadora las operaciones $2!$ por $2!$ por $3!$ y obtendrás como resultado: 24. Por último, realiza la división 5040 entre 24 y se obtiene 210.
2)	Otra manera de realizarlo con la calculadora científica es la siguiente: teclea $7!$ entre $2!$ y el igual; el valor restante divídelo entre $2!$ y este otro valor divídelo entre $3!$, y también obtendrás 210.

Utiliza la que más se te facilite.

PERMUTACIONES CIRCULARES

Cuando queremos conocer el número de maneras diferentes como podemos ordenar n objetos tomados todos a la vez, pero en lugar de estar distribuidos de forma horizontal o vertical (como el ejemplo de los niños sentados en una banca), se encuentran en forma circular, el patrón a utilizar es el siguiente:

$$P(n,r) = (n-1)!$$

EJEMPLO

1) ¿De cuántas maneras diferentes podremos ordenar a 6 niños sentados en una mesa circular?

$$P(n,r) = (n-1)! = (6-1)! = 5! = 120$$

120 formas diferentes de acomodar a 6 niños en una mesa circular.

Para cualquiera de los ejemplos anteriores, ¿si el orden no se toma en cuenta seguirá siendo permutación y tendrá el mismo número de soluciones?

COMBINACIONES

¿Qué entiendes por combinación? ¿Será equivalente a permutación?

Si tenemos una colección de n objetos, una combinación de estos n objetos tomados r a la vez, o una combinación r, es un subconjunto de r elementos. En otras palabras, una combinación r es una colección de r o n objetos donde el orden NO se tiene en cuenta (LIPSCHUTZ SEYMOUR, 1980).

El número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez lo denotaremos por:

$$C(n,r)$$

Fórmula o patrón para calcular combinaciones de n objetos tomados r a la vez:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$$

o bien:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

EJEMPLO:

1) Sea el conjunto: $A = \{a, b, c, d\}$

Determinar el número de permutaciones y combinaciones de tamaño 3, de este conjunto. Lista los resultados para distinguir la diferencia entre permutación y combinación.

a) Calculando de acuerdo a los patrones respectivos, se obtiene:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

Obteniendo 24 permutaciones de 4 objetos tomados 3 a la vez.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

Obteniendo 4 combinaciones de los cuatro objetos tomados 3 a la vez.

a) Lista los resultados para distinguir la diferencia entre permutación y combinación.

PERMUTACIONES:			
abc	bac	cab	dab
acb	bca	cba	dba
abd	bad	cad	dac
adb	bda	cda	dca
acd	bcd	cbd	dbc
adc	bdc	cdb	dcb

24 permutaciones

COMBINACIONES:
abc
abd
acd
bcd

4 combinaciones

El objetivo en conteo no es listar las soluciones, sino decir cuántas son.

Por lo que podemos concluir que las permutaciones son mayores que las combinaciones.

A continuación analizaremos los dos casos para encontrar diferencias entre las combinaciones y las permutaciones.

b) ENCONTRANDO DIFERENCIAS:

PERMUTACIÓN	*COMBINACIÓN*
Hay una secuencia de objetos o cadenas en las permutaciones. **Existe un orden.** **Ejemplo:** $abc \neq acb$ **Y se utilizan *todos* los elementos u objetos.**	No interesa el orden. Ejemplo: $abc = bca$ (Son iguales, ya que no me interesa el orden en que estén, es la misma cadena).
Orden es permutación.	Mientras los elementos sean diferentes, con que sea uno diferente la cadena es diferente, es otra combinación.
	El orden no interesa, sino los objetos que construyen la cadena.
	Tomar sin importar el orden es combinación.

EJEMPLO:

1) Si tenemos a 4 personas para acudir a una reunión:
p_1, p_2, p_3, p_4 así corresponde a una *combinación.*

Pero si añadimos al caso que la primera persona será el responsable de la reunión, la segunda será el secretario, la tercera será el auxiliar y la cuarta el invitado…

Entonces, al poner jerarquías, es una *permutación*.

EJEMPLOS DE PERMUTACIONES:

1) CON NÚMEROS
Números $563 \neq 365$ EXISTE JERARQUÍA, UN ORDEN

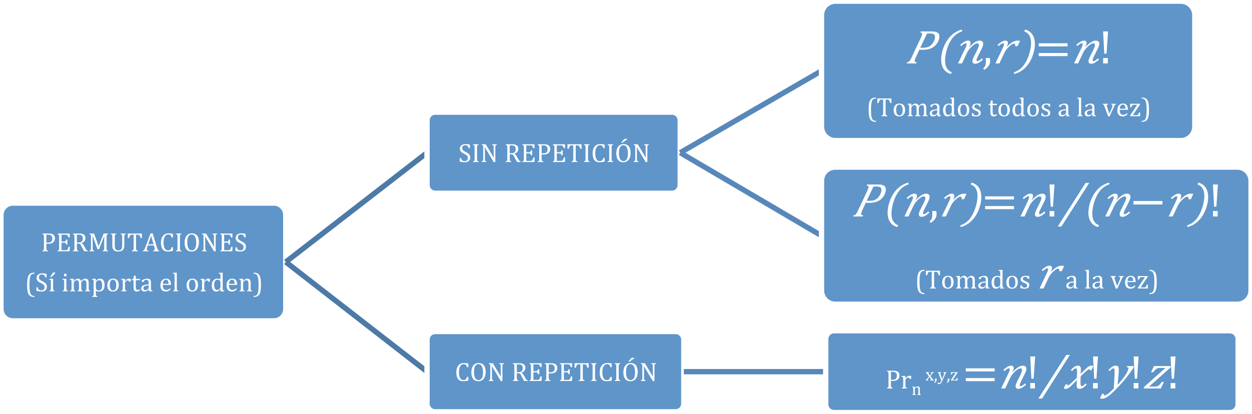
Clave $1369 \neq 6931$

2) CON LETRAS (aclarando, sin buscar significado a las palabras):
ROMA: MARO
AMOR
OMAR
MAOR cuando construyo palabras *tiene orden.*
Si es con personas y jerarquizo, es PERMUTACIÓN

Si solamente las selecciono sin ninguna condición, es COMBINACIÓN.

Permutaciones con Repeticiones

RESUMEN DE CASOS:



EJEMPLO:

3) ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden formar con el número $2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4$?

Para resolverlo, primero lo clasificaremos como permutación o combinación.

Responde:

Como en ningún momento dice “casos diferentes”, entonces se pueden repetir, así es que será: PERMUTACIÓN.
¿Ahora importa el orden o no? Sí.

En el caso de los números, ya habíamos mencionado que sí importa el orden, ya que no es lo mismo el número 234 que el 342; en las cifras sí importa el orden.

Por lo que lo clasificas como: PERMUTACIÓN.

Porque:

- ✓ En las permutaciones se toman todos los elementos.
- ✓ En este caso corresponde a una cifra; sí importa el orden.
- ✓ Si importa el orden, es permutación.
- ✓ Además, es con repetición.

Después de clasificar: la fórmula a utilizar será:

$$Pr_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x!\,y!\,z!}$$

De acuerdo a los datos del problema, se obtiene que:
$x = 2!, \quad y = 3!, \quad z = 4!, \quad n = 9$

Sustituyendo se obtiene:

$$Pr_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x!\,y!\,z!} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260$$

1260 números diferentes de 9 cifras con los datos proporcionados.

EJEMPLO:

4) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar con los números $1, 2, 3, 4, 5$?

Para clasificar, responde:
Es con repetición _____ Sin repetición __X__
En cuanto al orden:
Importa __X__ No importa _________
Se utilizan TODOS los elementos disponibles.
Por estas características, se puede clasificar el problema como: PERMUTACIÓN.
La fórmula a utilizar será:

$$\boxed{P(n,r) = n!}$$

Sustituye y resuelve:

$$P(n,r) = n! = 5! = 120$$

120 números de cinco cifras diferentes.

EJEMPLO:

Permutaciones con Repeticiones

5) ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden realizar en una quiniela que te permite elegir 6 números del cero al cuarenta y nueve?

¿Importa el orden?: Sí __X__ No ______

¿Se pueden repetir? Sí _______ No __X

Por lo que se clasifica como: PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN.

El patrón o fórmula a utilizar es:

$$\boxed{Pr_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x!\,y!\,z!}}$$

Sustituye y obtén el resultado:

$$Pr_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x!\,y!\,z!} = \frac{50!}{(50-6)!} = \frac{50!}{44!} = 11\ 441\ 304\ 000$$