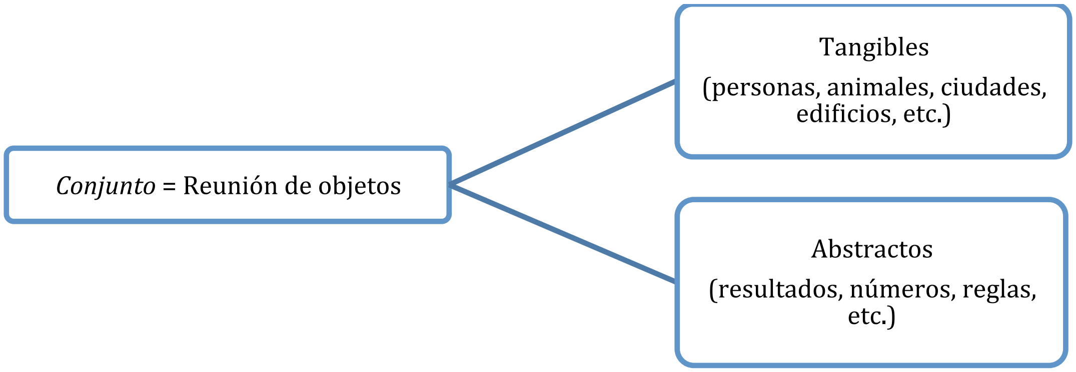
Conceptos Elementales de Probabilidad

Para el estudio de la teoría de la probabilidad se requieren algunos conocimientos básicos sobre la teoría de conjuntos, por lo que iniciaremos la lección con un breve pero necesario repaso de algunos de ellos.

Georg Cantor, matemático ruso (Obregón Sanin, 1991) y padre de la moderna teoría de conjuntos, define al conjunto como una colección o reunión en un todo de objetos bien definidos y separados de nuestra intuición o nuestro pensamiento.



A cada uno de los objetos que integran el conjunto se le denomina *elemento.*

Ejemplo:

Sea $A = \{x/x \leq 10\}$ (Notación)

Esta expresión se lee: el conjunto A está formado por todos los valores que puede tener "x"**,** tal que esos valores son menores o iguales a diez.

Solución al conjunto será $A = \{10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0,-1,-2.......-\infty\}$

Explicación:

Incluye al 10 porque la expresión manifiesta menor o "igual" a 10 y el $10 = 10$, luego el $9, 8, 7, 6$ ... son valores menores a 10. ¿Hasta qué número tendríamos que incluir en el conjunto? Como no existe limitante o condicional en este conjunto, y suponiendo que el Universo está constituido por todos los números enteros positivos y negativos (z), tendremos una continuidad hacia el infinito negativo.

Del conjunto A también podríamos determinar que el 10 es un elemento de dicho conjunto, así como el número 7, el número -12, etc. La idea de conjunto no hace referencia a ninguna ordenación específica en los elementos, solo a su presencia.

Suelen utilizarse letras mayúsculas para denotar conjuntos y minúsculas para los elementos del conjunto. Por ejemplo, para designar que "r" pertenece al conjunto B, se escribe: $r\, \varepsilon\, B$ y se lee "r" pertenece a B. En el caso contrario sería $r \notin B$ y se lee "r" no pertenece a B.

El signo $\subset$ significa inclusión o incluido. Por ejemplo, $n \subset A$; se lee "el elemento "n" está incluido en el conjunto A" o bien, si fuese $B \subset F$, se lee "el conjunto B está incluido en el conjunto F".

El signo $\cup$ significa *unión* entre dos o más conjuntos; formando un conjunto nuevo, digamos denominado C, que está formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B y se expresa $C = A \cup B$ o $C = A + B$.

El signo $\cap$ representa la intersección de dos conjuntos; formando un nuevo conjunto, digamos D, formado por los elementos que son comunes a A y a B.

El signo Φ significa conjunto vacío, cuando los conjuntos no tienen ningún elemento en común.

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos (LIPSCHUTZ SEYMOUR, 1980). Un conjunto es finito si consta de cierto número de elementos distintos; es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar tiene un fin, puede acabar; de no ser así, el conjunto es infinito. Veamos algunos ejemplos:

1) Sea $N = \{meses\ del\ año\}$

$N = \{enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre\}$ por lo que podemos concluir que el conjunto es finito.

2) Sea $E = \{números\ pares\}$, el conjunto es infinito (∞).

El signo $\mathcal{U}$ representa al conjunto universal o universo. Todos los conjuntos que intervienen son subconjuntos de un superconjunto, el cual está formado por la totalidad de los elementos. Por ejemplo, el conjunto E del caso anterior es un subconjunto de los números reales, por lo que el conjunto de los números reales podría ser su conjunto universal: $\mathcal{U} = \{números\ reales\}$.

Los conjuntos son *disjuntos* cuando, al comparar los elementos de dos conjuntos, no tienen elementos en común, por ejemplo:

Sea $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$; al no tener elementos en común, los conjuntos A y B son disjuntos.

El signo C significa complemento de un conjunto; por ejemplo, la expresión A^C se lee "complemento del conjunto A", es el conjunto de todos los elementos del conjunto $\mathcal{U}$ que no están incluidos en A, lo que le falta a A para ser el conjunto universal.

Por ejemplo, sea el caso de que $\mathcal{U}$={Números enteros} y el conjunto B ={Números enteros pares}, el conjunto B^c={Números enteros negativos}.

Un diagrama de Venn-Euler o simplemente Diagrama de Venn, permite ilustrar de manera sencilla las relaciones entre conjuntos, por lo general mediante un área plana limitada como un círculo.

Ejemplo 1:

Dados los conjuntos $\mathcal{U} = \{Números\ enteros\}$, $B = \{Números\ enteros\ pares\}$, $B^C = \{Números\ enteros\ negativos\}$, representarlos mediante un diagrama de Venn.

Ejemplo 2:

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$R = \{x/x \leq 15\}$ y $S = \{x/x \geq 9\}$

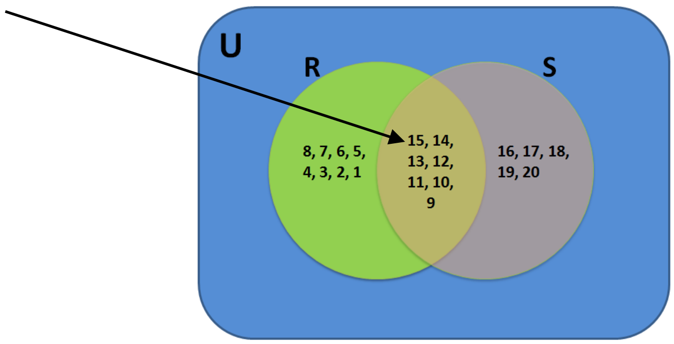
Calcular:

1) $R \cup S =$
2) $R \cap S =$
3) $R^C =$

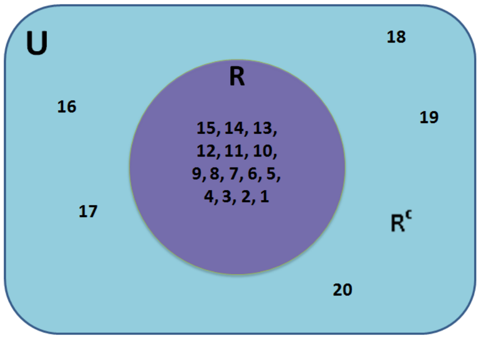
<u>Respuesta:</u> comencemos asignando los elementos que pertenecen al conjunto R y S, partiendo del conjunto universal del problema.

$R = \{15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ $\quad$ $S = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

1) $R \cup S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} = \mathcal{U}$
2) $R \cap S = \{15, 14, 13, 12, 11, 10, 9\}$



3) $R^C = \{16, 17, 18, 19, 20\}$



El ser humano es un investigador innato; a través del tiempo ha observado y analizado modificaciones que ocurren en la naturaleza, denominados fenómenos. Es un gran cuestionador de lo que ocurre en su entorno, lo que lo ha llevado a la realización de múltiples experimentos.

Para ello, trata de recrearlos lo más cercano posible a la realidad. Un experimento es un procedimiento, a través del cual, se trata de descubrir o comprobar una o varias hipótesis relacionadas con un determinado fenómeno de estudio a través de la manipulación de diferentes variables que intervienen en el mismo.

En ocasiones, se pueden incluso predecir los resultados con anticipación al experimento, por ejemplo, al determinar el día de la semana que será mañana, o al lanzar una piedra verticalmente hacia arriba en las mismas condiciones, se obtiene el mismo resultado. Este tipo de experimentos se denominan "Determinísticos".

Cuando el resultado de un experimento no es posible predecirlo con certeza, se le llama aleatorio; es decir, depende del azar.

La posibilidad u oportunidad de que ocurra algo, una determinada situación o suceso, lo estudia la probabilidad. Cuántas veces te habrás preguntado la posibilidad de que el día de mañana llueva, por ejemplo; o de que cierta persona le declare su afecto a otra, la oportunidad que tienes de obtener un premio al comprar un boleto para una rifa, etc.

Históricamente, la teoría de la probabilidad inició con el análisis de los juegos de azar, como la ruleta y las cartas. Las personas comenzaron a cuestionarse sobre las posibilidades reales que tenían de ganar apuestas en los juegos; es decir, dejar de llamarle "suerte". La probabilidad "p" de que ocurra un evento o suceso A, se definió de la siguiente manera: si A puede ocurrir de "n" maneras distintas, entre un total de "s" igualmente posibles, entonces:

$$p = P(A) = \frac{n}{s}$$

Analicemos la simbología de la ecuación anterior:

Cuando se realiza un experimento aleatorio, el conjunto de todos los resultados posibles se denomina espacio muestral y suele representarse por cualesquiera de los siguientes símbolos: S, e, Ω.

Ejemplo: cuando lanzamos al aire una moneda, tenemos dos soluciones posibles:

1) que caiga águila

2) que caiga sello

Por lo que el espacio muestral de este experimento aleatorio es: $S = \{Águila, Sello\}$.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
1)  **67200385**	$\boldsymbol{S = \{Águila, Sello\}}$ **tendremos 2 resultados posibles**

A cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio, se le denomina elemento o suceso. Cualquier hecho observable, que pueda aparecer en la realización particular de un experimento, es un subconjunto de un espacio muestral; es decir, un conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio.

En el caso del ejemplo 1, águila es un elemento, suceso o punto del espacio muestral. Es un resultado en particular del experimento, un elemento del espacio muestral.

Existen dos tipos de espacio muestral: finito o infinito. Si consta de cierto número de elementos distintos; es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar tiene un fin (puede acabar), es finito; de lo contrario, es infinito.

Veamos algunos ejemplos:

$S = \{días\ de\ la\ semana\} = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$, por lo que podemos concluir que es finito.

$S = \{números\ nones\} = \{\ldots. -3, -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5, 7\ldots\ldots\}$. El conjunto es infinito.

TIPOS DE EVENTOS

Cuando realizas un experimento y no obtienes ningún resultado, se dice que el experimento es un suceso imposible, no puede suceder; su resultado es el conjunto vacío ($\emptyset$).

Cuando realizas un experimento y los resultados obtenidos coinciden con el espacio muestral, se le denomina evento cierto o seguro; además, su probabilidad tiene un valor de 1.

$$S = \ evento\ cierto\ o\ seguro\ =\ 1$$

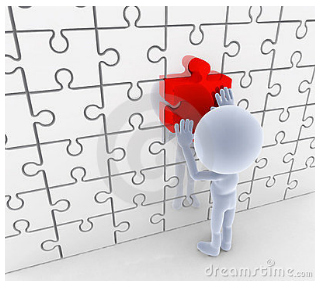
También se pueden combinar eventos para formar nuevos eventos. Para ello, se utilizan las diferentes operaciones con conjuntos: uniones, intersecciones, etc.

$A \cup B$ es el evento que sucede si y solo si A o B o ambos suceden.

$A \cap B$ es el evento que sucede si y solo si A y B suceden simultáneamente.

A^C (complemento de A), es el evento que sucede si y solo si A no sucede.

Dos eventos, A y B, son llamados mutuamente exclusivos o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.



Cuando trabajas con dos eventos que no tienen elementos en común, se les denominan eventos mutuamente excluyentes, disjuntos o incompatibles; su intersección es el conjunto vacío.

Ejemplos:

$R = \{hombres\}$ $\quad T = \{Mujeres\}$ $\quad R \cap T = \emptyset$

$W = \{números\ pares\}$ $\quad Y = \{números\ impares\}$ $\quad w \cap Y = \emptyset$

En el caso de dos sucesos o eventos que, al unirlos, forman la totalidad del espacio muestral, se les denomina eventos complementarios; son dos sucesos o eventos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio muestral. Sus elementos no se repiten y la unión de estos es igual a la totalidad del espacio muestral o la totalidad de casos posibles.

Conceptos Elementales de Probabilidad

Ejemplo: lanzamiento de una moneda 3 veces:

si $S = \{AAA, AAS, ASA, SAA, SSS, SSA, SAS, ASS\}$ donde $A = \acute{A}GUILA \quad S = SELLO$

Sea el evento $B = \{dos\ o\ más\ sellos\ aparezcan\ consecutivamente\}$

$$B = \{AAA, AAS\ , SAA\}$$

¿Cuál es el complemento del evento B? $B^C = \{ASA, SSS, SSA, SAS, ASS\}$

Cuando el resultado de uno de los eventos no interfiere o influye en el resultado de otro, se dice que los eventos son independientes. El que ocurra uno no afecta a que ocurra el otro. En el caso contrario, se les llama eventos dependientes.