Prueba de Hipótesis: Varianza

La prueba de hipótesis para la varianza es un método estadístico que sirve para determinar si se rechaza o no la hipótesis nula de una varianza poblacional. Es decir, la prueba de hipótesis para la varianza sirve para rechazar o aceptar la hipótesis que se tiene del valor de la varianza de una población.

En concreto, según el valor del estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza y el nivel de significación escogido, se rechaza o se acepta la hipótesis nula.

El estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza es igual a la diferencia del tamaño de la muestra menos uno multiplicado por la varianza muestral y dividido por el valor de la varianza poblacional propuesto. El estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza tiene una distribución ji-cuadrado.

Así pues, la fórmula para calcular el estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza es la siguiente:

$$\boldsymbol{x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}$$

Donde:

- X^2 es el estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza, el cual tiene una distribución chu-cuadrado.
- n es el tamaño de la muestra.
- s^2 es la varianza de la muestra.

- σ^2 es la varianza de la población.

Para interpretar el resultado del estadístico, se debe comparar el valor obtenido con el valor crítico de la prueba.

- Si la prueba de hipótesis para la varianza es de dos colas, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es mayor que el valor crítico $X^2_{1-\frac{\alpha}{2}|n-1}$ o si el valor crítico es menor que $X_{\frac{\alpha}{2}|n-1}$.
- Si la prueba de hipótesis para la varianza corresponde a la cola derecha, se rechaza hipótesis nula si el estadístico es mayor que el valor crítico $X^2_{1-\frac{\alpha}{2}|n-1}$.
- Si la prueba de hipótesis para la varianza corresponde a la cola izquierda, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es menor que el valor crítico $X_{\alpha|n-1}$.

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0 \quad \longrightarrow \quad \text{Si } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0 \quad \longrightarrow \quad \text{Si } \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0 \quad \longrightarrow \quad \text{Si } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0 \quad \longrightarrow \quad \text{Si } \chi^2 < \chi^2_{\alpha|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

Los valores críticos de la prueba de hipótesis para la varianza se obtienen de la tabla de la distribución chi-cuadrado. Tengamos en cuenta que los grados de libertad de la distribución chi-cuadrado son el tamaño de la muestra menos 1.

Ejemplo 1. *Una fábrica tiene una máquina que produce piezas para un coche con una alta precisión. Sin embargo, se tiene la sospecha de que se ha desviado y ahora fabrica las piezas con una varianza superior a 8 mm*^{2}*. Para refutar esta suposición, se analiza una muestra de 25 piezas y su varianza muestral es de 9,1 mm*^{2}*. ¿Se puede rechazar la hipótesis inicial con un nivel de significación* α*=0,05?*

La hipótesis nula y la hipótesis alternativa de este contraste de hipótesis para la varianza son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 8 \\ H_1: \sigma^2 > 8 \end{cases}$$

Para determinar si se puede rechazar o no la hipótesis nula, calculamos el estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza utilizando la fórmula que hemos visto más arriba:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \frac{(25-1)\cdot 9,1}{8}$$

$$\chi^2 = 27,3$$

Ahora buscamos el valor crítico correspondiente a la cola derecha para 24 grados de libertad y un nivel de significación α*=0,05 en la tabla de la distribución chi-cuadrado:*

$$\chi^2_{1-\alpha|n-1} = ?$$

$$\chi^2_{0,95|24} = 36,415$$

Así que el estadístico calculado es menor que el valor crítico de la prueba y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula de la prueba de hipótesis para la varianza, sino que se rechaza la hipótesis alternativa.

$$27,3 < 36,415 \longrightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

Prueba para la varianza de dos poblaciones

La **prueba de hipótesis para la varianza de dos poblaciones** se usa para rechazar o aceptar la hipótesis de que las varianzas de dos poblaciones diferentes son iguales.

De modo que la hipótesis nula de una prueba de hipótesis para la varianza de dos poblaciones siempre es la siguiente:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Y la hipótesis alternativa puede ser cualquiera de las siguientes tres opciones:

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

En este caso, la fórmula para calcular el estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza de dos poblaciones es la siguiente:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Donde:

- F es el estadístico de la prueba de hipótesis para la varianza de dos poblaciones, el cual sigue una distribución F.
- σ_1^2 es varianza de la población 1.
- σ_2^2 es varianza de la población 2.
- s_1^2 es varianza de la muestra 1.
- s_2^2 es varianza de la muestra 2.
- n_1 es el tamaño de la muestra 1.
- n_2 es el tamaño de la muestra 2.

Como la distribución F de Snedecor no es simétrica, la hipótesis nula se rechaza según los siguientes criterios:

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \longrightarrow \text{Si } F > F_{1-\alpha/2|n_1-1|n_2-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \longrightarrow \text{Si } F < F_{\alpha/2|n_1-1|n_2-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \longrightarrow \text{Si } F > F_{1-\alpha|n_1-1|n_2-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \longrightarrow \text{Si } F < F_{\alpha|n_1-1|n_2-1} \text{ se rechaza } H_0$$

Referencias:

Antonio, J. (2019). Comprendamos las pruebas de hipótesis: Por qué es necesario utilizar pruebas de hipótesis en estadística. Recuperado a partir de: www.addlink.es. https://www.addlink.es/noticias/minitab/2870-comprendamos-las-pruebas-de-hipotesis-por-que-es-necesario-utilizar-pruebas-de-hipotesis-en-estadistica

Hoel, P. G. (1984). Elementary Statistics. John Wiley & Sons.