Teorema del Límite Central

Uno de los resultados más importantes es el denominado Teorema del Límite Central. Se asocia a la convergencia, a una distribución Normal del promedio de una muestra aleatoria, independientemente de la distribución de probabilidad de la cual provenga.

Teorema del Límite Central

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la VA $X \sim \mathbb{D}(\mu, \sigma)$, donde $\mathbb{D}$ es una distribución de probabilidad arbitraria con media μ y desviación estándar σ. Se define la variable aleatoria

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

denominada promedio o media aritmética. Se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Esto es, $\bar{X}$ se distribuye normal con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

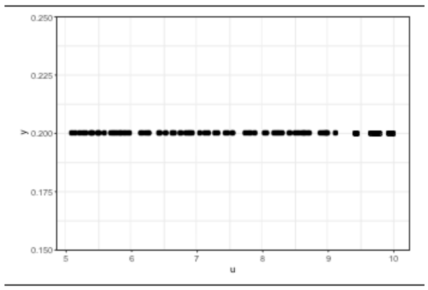
La distribución Normal resultante preserva la media y reduce la desviación estándar. Este resultado tiene un impacto relevante en pruebas de hipótesis.

Ejemplo:

Una distribución uniforme continua U en el intervalo (a, b) tiene la densidad:

$$f(u; a, b) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(u)$$

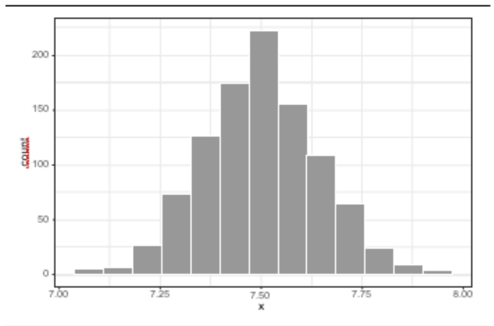
Lo que se denota U ~ U(a, b) Se generan n_u = 300 números aleatorios de U ~ U(5, 10). Todos los valores de la fdp son iguales para esta distribución.



El promedio de los números generados es $\bar{u} = 7.433$ y el rango, definido como el valor máximo menos el valor mínimo es $rg_u = 4.8908$.

Se generan $n = 1000$ conjuntos de tamaño $n_u = 100$ de muestras aleatorias de $U_i \sim U(5, 10)$ y para cada una se obtiene el promedio X_i como:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{100} \sum_i U$$



Para la nueva variable se tiene el promedio $\bar{x} = 7.499$ y un rango $rg_x = 0.8660134$. Se observa que los promedios de *U* y *X* son similares, pero el rango de *X* se reduce sustancialmente respecto al rango obtenido de *U*. Este resultado era esperado de acuerdo al *TLC.*

Ejemplo:

Tomando como referencia el ejemplo 20 si X es la VA definida como el contenido de café, se sabe que X ~ N (180, 5) de donde se toma una muestra de n = 150 cafés preparados.

1. Obtenga la probabilidad de que el contenido promedio...

a) Sea menor de 179.5ml.

Al aplicar el TLC se dice que:

$$\bar{X} \sim N \quad 180, \frac{\sqrt{5}}{150} = N \quad 180, \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Entonces:

$$P[\bar{X} < 179.5] = P[Z < -1.2247] = 0.1103$$

b) Sea mayor de 180.5ml.

$$P[\bar{X} < 180.5] = P[Z > 1.2247]$$

$$= 1 - P[Z \leq 1.2247]$$

$$= 1 - 0.8897$$

= 0.1103

Resultados obtenidos:

a) Esté entre 179.5ml y 180.5ml.

$P[179.5 < \bar{X} < 180.5]$

Equivale a:

$P[-1.2247 < Z < 1.2247]$

$= P[Z < 1.2247] - P[Z < -1.2247]$

$= 0.8897 - 0.1103$

$= 0.7794$

2. ¿Cuál es el contenido promedio esperado de tal manera que la probabilidad de ser mayor que este sea de 0.25?

Referencias:

Mendenhall, W. (2010). Introducción a la Probabilidad y Estadística. Cengage Learning Editores.

Hoel, P. G. (1984). Elementary Statistics. John Wiley & Sons.