Probabilidades acumuladas y cantiles con uso de tablas

Esta sección se enfoca al cálculo de probabilidades acumuladas y cuantiles mediante el uso de tablas. La solución de cada uno de los problemas se centra en expresarlos de la forma $P[Z \leq z]$, donde $z > 0$. Además, se hace uso de la simetría de la distribución y de probabilidades complementarias respecto a 1.

Ejemplo:

Se divide por casos.

Caso 1. $P[Z < 1.24]$. El resultado se localiza en el renglón correspondiente al valor de z de 1.2 en combi nación con la columna cuyo valor es 0.04. El resultado es 0.8925.

Caso 2. $P[Z > -1.13]$. Dado que $z < 0$ se aprovecha la simetría. Entonces:

$$P[Z > -1.13] = P[Z < 1.13]$$

$$= 0.8708$$

Caso 3. $P[Z > 1.96]$. Dado que $z > 0$ se aprovecha el complemento. Entonces:

$$P[Z > 1.96] = 1 - P[Z \leq 1.96]$$

El uso de $\leq$ es para garantizar la consistencia en la notación matemática, ya que $<$ produciría el mismo resultado por ser una variable continua. Entonces, en la tabla de probabilidad el renglón correspondiente a 1.9 y columna correspondiente a 0.06 contiene la probabilidad $P[Z \leq 1.96] = 0.975$. Por tanto,

$$P[Z > 1.96] = 1 - P[Z \leq 1.96] = 1 - 0.975 = 0.025$$

Caso 4. $P[Z < -1.13]$. Dado que $z < 0$ se usa la simetría y que por la desigualdad es $\geq$ se usa complemento. Entonces:

$$P[Z < -1.13] = P[Z \geq 1.13]$$
$$= 1 - P[Z < 1.13]$$
$$= 1 - 0.8708$$
$$= 0.1292$$

Caso 5. $P[-1.13 < Z < 1.24]$. Se tiene que $P[-1.13 < Z < 1.24] = P[Z \in (-1.13, 1.24)]$

$$= F(1.24) - F(-1.13)$$
$$= 0.8925 - 0.1292$$
$$= 0.7633$$

Los valores $F(1.24)$ y $F(-1.13)$ ya se calcularon en los casos 1 y 4.

El ejemplo muestra los distintos casos para uso de tablas con software especializado, esto ya no es necesario, ya que la mayoría da como resultado $P[Z \leq z]$. En caso de su aplicación en pruebas de hipótesis, el valor que se da es $P[Z > z]$, probabilidad a la que se refiere en la literatura como *p -value*. Más aún, la tabla solo considera hasta dos decimales para un valor de z dado; si se requiere más precisión será necesario interpolar. El cálculo de probabilidades acumuladas cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ es similar al del ejemplo, la diferencia solo radica en que primero se estandariza.

Ejemplo:

Sea $X \sim N(50, 10)$, *probabilidad* $P[X < 65]$, *primero se estandariza el valor de referencia; esto es:*

$$z = \frac{65 - 50}{10} = 1.5 \qquad (35)$$

Entonces

$$P[X < 65] = P[Z < 1.5]$$
$$= 0.9332$$

Para el caso de cuantiles, lo que se da es una probabilidad y se obtiene el valor correspondiente de la variable aleatoria hasta el cual se acumula dicha probabilidad.

Ejemplo: *Sea* $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Caso 1. Obtener $z_{0.88}$ se debe buscar en el cuerpo de la tabla el valor de probabilidad más aproximado. En este caso el valor se encuentra entre 0.8790 y 0.8810, que corresponde a los cuantiles 1.17 y 1.18. Haciendo una interpolación simple:

$$z_{0.88} = \frac{1.17 + 1.18}{2} = 1.175$$

Caso 2. Obtener $z_{0.12}$ hay que observar que las probabilidades en la tabla son de 0.5 o mayores.

$$z_{0.12} = -z_{0.88} = -1.175$$

Ejemplo: *Sea* $Z \sim N(0, 1)$.

Caso 1. Obtener $z_{0.88}$ se debe buscar en el cuerpo de la tabla el valor de probabilidad más aproximado. En este caso el valor se encuentra entre 0.8790 y 0.8810, que corresponde a los cuantiles 1.17 y 1.18. Haciendo una interpolación simple:

$$z_{0.88} = \frac{1.17 + 1.18}{2} = 1.175$$

Caso 2. Obtener $z_{0.12}$ hay que observar que las probabilidades en la tabla son de 0.5 o mayores. Entonces primero se obtiene el complemento $1 - 0.12 = 0.88$ y se obtiene el cuantil de este valor $z_{0.88} = 1.175$ (caso1). Por tanto, aplicando simetría. Entonces, primero se obtiene el complemento $1 - 0.12 = 0.88$ y se obtiene el cuantil de este valor $z_{0.88} = 1.175$ (caso 1). Por tanto, aplicando simetría

$$z_{0.12} = -z_{0.88} = -1.175$$

Ejemplo:

Una máquina expendedora de café prepara capuchinos cuyo contenido en mililitros sigue una distribución normal con media $\mu = 180$ y desviación estándar $\sigma = 5$.

1. Si se selecciona al azar una de las bebidas preparadas, cuál es la probabilidad de que contenga...

    a) menos de 185ml

$$P[X < 185] = P[Z < 1] = 0.8413$$

b) más de 190ml

$P[X > 190] = P[Z > 2]$

$= 1 - P[Z < 2]$

$= 0.0228$

c) *menos 175ml*

$P[X < 175] = P[Z < -1]$

$= P[Z > 1]$

$= 1 - P[Z < 1]$

$= 0.1587$

d) *entre 175ml y 190ml*

$P[175 < X < 190] = P[-1 < Z < 2]$

$= P[Z < 2] - P[Z < -1]$

$= 0.8186$

2. En un día dado se prepararon n = 150 capuchinos, cuántos se esperaría que contengan...

a) menos de 185ml.

$n_e = (150)(0.8413) = 126.2017 \rightarrow 126$

b) más de 190ml.

$n_e = (150)(0.0228) = 3.41252 \rightarrow 3$

c) menos 175ml.

$n_e = (150)(0.1587) = 23.79829 \rightarrow 24$

d) entre 175ml y 190ml.

$n_e = (150)(0.8186) = 122.7892 \rightarrow 123$

3. Se considera que solo el 90% de cafés en torno, de manera simétrica, al contenido nominal de 180ml está dentro de la norma. ¿Cuáles son los límites inferior y superior de contenidos dentro de la norma?

En términos de probabilidad el 90% es 0.90. Por tanto, el problema es encontrar los cuantiles x_1 y x_2 tales que $P[x_1 < X < x_2] = 0.90$. Para tal efecto primero se encuentran los correspondientes en Z, esto es los valores z_1 y z_2 tales que $P[z_1 < Z < z_2] = 0.90$.

Dado que son simétricos en torno a la media, estos corresponden a $z_1 = 0.5 - 0.45 = 0.05$ y $z_2 = 0.5 + 0.45 = 0.95$. Utilizando las tablas se encuentra:

$z_{0.95} = 1.645$

Y por simetría

$z_{0.05} = -1.645$

A partir de la expresión

$z = \frac{x - \mu}{}$

se despeja X

$x = z\sigma + \mu$

Sustituyendo en las expresiones anteriores se tiene:

$x_{0.05} = 171.776$

$x_{0.95} = 188.224$

4. Si este criterio de contenido nominal se aplicara, ¿cuántos de los 150 capuchinos no cumplen la norma? El 10 % no cumple la norma siendo un total de: (0.1)(150) = 15.

Referencias:

(2014). Distribuciones de probabilidad. Recuperado a partir de: https://www.sergas.es/Saude-publica/Documents/1899/Ayuda_Epidat_4_Distribuciones_de_probabilidad_Octubre2014.pdf