Productos notables y factorización binomios

La palabra **producto** se utiliza en el lenguaje matemático para definir el resultado de una multiplicación. Cuando realizamos multiplicaciones con términos algebraicos, en ocasiones nos daremos cuenta de que hay ciertos rasgos o características que se notan y que siempre se presentan al realizar estas operaciones. Si aplicamos esos rasgos, podremos realizar de manera más rápida las multiplicaciones. A estos productos los llamamos productos notables y hay varios de ellos.

Binomios conjugados: son aquellas expresiones que presentan las mismas variables, donde la única diferencia es la operación aritmética que se realiza entre ellas, por ejemplo:

El binomio a+b, tendrá como conjugado al binomio a-b y viceversa.

Ejemplo:

$$(a+b)(a-b) = a^2 \underline{-ab +ab} -b^2;$$

Solución:
Simplificando la ecuación, nos damos cuenta de que los términos centrales (-ab +ab) se eliminan, quedando solo los términos de los extremos, teniendo como resultado:

$$a^2 -ab +ab - b^2 = a^2-b^2$$

b)

$$(9x - 5)(9x +5) = 81x^2 \underline{+ 45x -45x} +25 = 81x^2 - 25$$

c)

$$(7x^2+ 3y^3)(7x^2 - 3y^3) = 49x^4 \underline{- 21x^2y^3 +21x^3y^3} -9y^6 = 49x^4 -9y^6$$

En los tres ejemplos anteriores podemos **notar** que los términos de en medio (subrayados) siempre se eliminan y queda el cuadrado del primero más/menos (**siempre se queda el signo del segundo factor**) el cuadrado del segundo.

Binomio al cuadrado: A este tipo de expresiones, su nombre las define por sí solas y no hay necesidad de profundizar en su explicación, mejor veamos un ejemplo explicado detalladamente.

$(x+y)^2$	Esta expresión se puede descomponer como la multiplicación de 2 factores idénticos.
$(x+y)(x+y)$	Se multiplican como cualquier polinomio.
$x^2 + xy + xy + y^2$	Simplificamos; es decir, sumamos los términos semejantes.
$x^2 + 2xy + y^2$	Esta última expresión será el resultado de la multiplicación.

Ejemplos:

a) $(a-b)^2 = a^2 \underline{-ab -ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $(x^2 + 4)^2 = x^4 + \underline{4x^2 + 4x^2} + 16 = x^4 + 8x^2 + 16$

c) $(2c - 3r)^2 = 4c^2 \underline{-6cr -6cr} + 9r^2 = 4c^2 - 12cr + 9r^2$

Nuevamente notamos un patrón común en los ejemplos y ese es que los términos medios son iguales, con lo que se pueden sumar y también podemos definir la regla para desarrollar los binomios al cuadrado.

1. El cuadrado del primer término.
2. Más/menos (según sea el signo suma/resta) el doble producto del primer término por el segundo.
3. Más el cuadrado del segundo término.

Factorización: esta operación consiste en descomponer en “factores” un término. Un factor es cada una de las cantidades que se multiplican para obtener un producto.

En aritmética, un número se puede descomponer en “**Factores**”, los que, al **multiplicarse** entre ellos, nos dan como resultado ese número.

Por ejemplo:

- ⇨ 2, 2 y 3 son factores del 12, porque 2 x 2 x 3 = 12
- ⇨ 2, 3 y 5 son factores de 30, porque 2 x 3 x 5 = 30

En el álgebra, también se les conoce como factores a todos aquellos términos que se presentan a manera de multiplicación.

Por ejemplo:

- ⇨ $a\ (a + b) = a^2 + ab$
- ⇨ $(x - y)\ (y^2) = xy^2 - y^3$

Factor común: es aquel término que es común en todas las expresiones presentadas y que, al acomodarse de cierta manera, nos da como resultado una expresión más pequeña o compacta. Retomando el ejemplo de los factores del número 12 (que son, 2, 2, 3), nos damos cuenta de que el número 2 es común en la expresión 2 x 2 x 3; al acomodarla de manera más resumida, podemos decir que $2^2 \times 3 = 12$ o bien $4 \times 3 = 12$.

Ejemplos:

Factorizar: $x^2 + 2x$,

Solución:

- Si descomponemos x^2, tendremos que es **(x) (x)** = $\mathbf{x^2}$.
- Nuestra ecuación original ahora será **(x) (x)** + **2x**,
- Inmediatamente nos damos cuenta de que la "x" es común a los dos términos (separados por el signo de +) en la ecuación.
- Tomamos una "x" de cada término y la multiplicamos por estos dos términos, de tal manera que tendremos la misma ecuación pero expresada de otra manera, es decir **x (x+2)**.
- Si realizamos la multiplicación, obtendremos nuevamente la ecuación original $\mathbf{x^2 + 2x}$.

Diferencia de cuadrados: al multiplicar binomios conjugados, al decir conjugados, nos referimos a que los términos del binomio son prácticamente los mismos pero con el signo diferente. Por ejemplo (a+b)(a-b), el resultado es una diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$.

Cuando tenemos una expresión de esta forma, podemos pasar a su factorización realizando los siguientes pasos:

1. Obtener la raíz cuadrada de cada término.
2. Con las raíces obtenidas, presentar los factores del binomio, uno a manera de suma (+) y el otro como resta (-).
3. Para comprobar la factorización solo multiplicamos el binomio y debemos obtener nuevamente la ecuación original.

Ejemplo:

Factorizar: $b^2 -1$

Solución: aunque pareciera que no es diferencia de cuadrados, recordemos que un cuadrado es el resultado de multiplicar un número por sí mismo, y
$1 \times 1 = 1$

1. Obtener raíces de los términos, para este problema son, b y 1.
2. Componer el binomio con las raíces.

$$(b+1)(b-1)$$

3. Comprobar multiplicando el binomio.

$$(b+1)(b-1) = b^2 + b - b - 1 = b^2 - 1$$

Trinomio Cuadrado Perfecto: una expresión de este tipo tiene las siguientes características:

⇨ El primer y tercer términos son positivos.

⇨ Ambos términos tienen raíz cuadrada exacta.

⇨ El segundo término es el doble del producto de las raíces, sin importar el signo.

Una vez verificadas estas propiedades, podemos proceder a construir el binomio al cuadrado, que lo representa de forma factorizada; para ello realicemos los pasos descritos a continuación.

1. Obtener la raíz cuadrada del **primer y tercer** términos.

2. Construir el binomio utilizando el signo del **segundo** término.
3. Elevar el binomio al cuadrado.

Factorizar: **$16x^2$ -24x + 9**

Solución:

1. Obtener Raíces $\sqrt{16x^2} = 4x$ y $\sqrt{9} = 3$.
2. Construir el binomio usando el signo del segundo término.

$$(4x - 3)$$

3. Elevar el binomio al cuadrado.

$$(4x - 3)^2$$

4. Desarrollar el binomio y se debe obtener la ecuación original.

$$(4x - 3)^2 = 4x^2 - 24x + 9$$