# TÉCNICAS BÁSICAS DE CONTEO

https://images.app.goo.gl/k7SATfYrmj8bKyM48

El conteo es un área fundamental en la teoría de la probabilidad y la combinatoria que estudia la forma de contar los posibles resultados de un conjunto de eventos o situaciones bajo ciertas condiciones. Las **técnicas básicas de conteo** nos permiten calcular el número total de formas en que pueden ocurrir diferentes combinaciones y arreglos de objetos, sin tener que enumerarlos todos explícitamente, lo que facilita el análisis de problemas complejos.

A continuación, se presentan las técnicas más importantes de conteo.

## TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CONTEO O PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN (REGLA DEL PRODUCTO)

El **principio de multiplicación** establece que, si un proceso o experimento se puede descomponer en varias etapas o eventos independientes, el número total de maneras de realizar todos los eventos es el producto de las opciones disponibles en cada etapa.

**Enunciado:** Si un proceso tiene p formas de ocurrir y otro proceso tiene q formas de ocurrir, y ambos son independientes, entonces el número total de formas en que los dos procesos pueden ocurrir es:

$$\text{Total de combinaciones} = p \times q$$

**Ejemplo:** Si lanzamos un dado y una moneda, el dado tiene 6 posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5, 6) y la moneda tiene 2 posibles resultados (cara o cruz). El número total de resultados posibles al lanzar ambos es:

$$6 \times 2 = 12$$

Por lo tanto, hay 12 combinaciones posibles al lanzar un dado y una moneda.

**Ejemplo:** Si tenemos 3 camisas (A, B, y C) y 4 pares de pantalones (w, x, y, y z). El número total de resultados posibles de combinaciones serán:

$$3 \times 4 = 12$$

Combinaciones posibles:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aw | Ax | Ay | Az |
| Bw | Bx | By | Bz |
| Cw | Cx | Cy | Cz |

## PERMUTACIONES

Las **permutaciones** son una técnica de conteo que se utiliza para determinar el número de formas en que se pueden ordenar un conjunto de objetos. Es decir, son arreglos ordenados de elementos, pero no es posible repetir ningún elemento de la población en su conformación.

Si se tiene un conjunto de n objetos distintos, las permutaciones son subconjuntos de r objetos, en donde una permutación es distinta de otra si difiere en al menos un elemento o en el orden de estos.

**Condición r<n**

Para escoger el primer elemento hay n formas para hacerlo.
Para escoger el segundo elemento hay (n-1) formas distintas.
Para escoger el tercer elemento hay (n-2) formas distintas.
Para escoger el n-ésimo elemento hay [ r-(n-1)] formas distintas.

Por el principio fundamental del conteo, el número total de permutaciones es:

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)(\ldots(n-r+1)$$

Fórmula:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)^!}$$

Si en las permutaciones r=n entonces, la cantidad de formas diferentes de ordenar n objetos distintos es:

$$P(n,n)=n!$$

Donde n! (factorial de n) es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1 n! =$$

**Ejemplo:** Si tenemos 3 letras distintas (A, B y C) el número de formas diferentes en que podemos organizarlas es:

$$P(3)=3!=3\times2\times1=6$$

Las 6 permutaciones posibles son:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

**Ejemplo:** En un sorteo cada participante debe elegir en orden cuatro imágenes entre 25. En el sorteo se muestran una a una cuatro de ellas (sin repetición) y ganan quienes acierten a las cuatro en el mismo orden que salieron. ¿Cúantos posibles resultados puede tener el sorteo?

No. de resultados= (25)(24)(23)(22) = 303,600 resultados.

## PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Si algunos de los elementos que estamos arreglando son iguales, debemos tener en cuenta esta repetición para no contar como diferentes arreglos aquellos que son indistinguibles entre sí.

**Enunciado:** Si tenemos un conjunto de n elementos, donde hay $r_1$ elementos de un tipo, $r_2$ elementos de otro tipo, y así sucesivamente hasta $r_k$ elementos de un tipo, la cantidad de permutaciones posibles es:

PR(n,r)=n.n,……n= $n^r$ también se expresa como:

$$PR_f^n = n^r$$

Con factorial: $n!/r_1!\cdot r_2!\cdots\cdot r_k$

Donde n! es el número total de elementos, y r1!,r2!,…,rk! son los factoriales de las cantidades repetidas de cada tipo de elemento.

**Ejemplo:** Si tenemos las letras A, A, B y C, el número de formas en que podemos ordenarlas es:

4!2! =242=12

## PERMUTACIONES CON GRUPOS DE OBJETOS IGUALES:

Si en un conjunto de tamaño n existen m1 objetos iguales, m2 iguales,….mk objetos iguales. Donde: m1+m2+….+mk =n

El número total de n objetos es:

$$P_{m_{1,m2,\ldots mk}}^n = \frac{n!}{m_1!\ m_2!\ldots . m_k}$$

**Ejemplo:** ¿cuántos códigos diferentes de siete letras pueden formarse con tres letras Y, dos letras Z y dos letras W?

$$P_{3,2,2}^7 = \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210$$

## COMBINACIONES

Las **combinaciones** se utilizan cuando no importa el orden de los elementos seleccionados. Es decir, estamos interesados en contar cuántas formas se pueden seleccionar r elementos de un conjunto de n elementos sin considerar el orden de selección.

Condición: r<n

**Enunciado:** El número de combinaciones de r elementos tomados de un conjunto de n elementos se calcula mediante la fórmula:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!\,(r-n)!}$$

Donde C(n,r)) representa el número de combinaciones posibles de r elementos de un total de n.

**Ejemplo:** Si tenemos 5 objetos (A, B, C, D, E) y deseamos seleccionar 3 de ellos, el número de combinaciones posibles es:

$$C_{(5,3)} = \frac{5!}{3!\,(3-5)!} = \frac{5*4}{2*1} = 10$$

Las 10 combinaciones posibles son: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

### 🎲 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Cuando se permite la repetición de elementos en las combinaciones las fórmulas de combinaciones cambian ligeramente. Este caso es útil cuando se quiere seleccionar elementos de un conjunto, pero no hay restricción en cuántas veces se puede seleccionar cada uno de ellos.

Condición: r<n y r>n

**Enunciado:** El número de combinaciones con repetición de r elementos tomados de un conjunto de n elementos se calcula mediante la fórmula:

$$CR_f^n = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

**Ejemplo:** Si tenemos 3 tipos de frutas (manzana, naranja y plátano) y queremos elegir 4 frutas con repetición, el número de combinaciones posibles es:

$$CR_4^3 = C_3^{3+4-1} = \frac{(3+4-1)!}{4!\,(3-1)!} = 15$$

Las 15 combinaciones posibles son: 4 manzanas, 3 manzanas y 1 naranja, 3 manzanas y 1 plátano, 2 manzanas y 2 naranjas, etc.

**Referencias:**


Feller, W. (1968) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1 (3rd ed.). EUA. Wiley.

Ross, S. (2009) Introduction to Probability Models. EUA. Academic Press.

Valdez y Alfaro, Irene Patricia. (2018) Facultad de Ingeniería UNAM. Recuperado de: http://www.dcb.unam.mx/profesores/irene/Notas/Tema_2-0.pdf