LA LEY DE LOS NÚMEROS GRANDES (LNG)

"No se puede predecir el comportamiento individual, pero si el comportamiento promedio"

Simeon Denis Poisson

La **Ley de los Grandes Números** (LGN) es un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad y se refiere a la tendencia de que, a medida que aumentamos el número de experimentos o muestras, el promedio de los resultados observados se aproxima al valor esperado teórico (la media). En otras palabras, con un número suficiente de observaciones, la media muestral se estabiliza y converge a la media poblacional. La ley de los Números Grandes tiene aplicaciones fundamentales en la estadística, la teoría de probabilidades y en el análisis de sistemas que involucran grandes volúmenes de datos.

Existen dos formas de enunciar la ley de los números grandes:

- **Ley débil de los grandes números**: Esta ley establece que a medida que el número de observaciones crece, la probabilidad de que la media muestral se desvíe de la media poblacional por más de una cantidad pequeña tiende a cero. Formalmente, para cualquier $\epsilon>0$, la probabilidad de que la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea mayor que ϵ se hace cada vez más pequeña a medida que aumentamos el tamaño de la muestra.

En términos matemáticos, si X_1, X_2, X_3,… son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valor esperado E[Xi]=μ y varianza finita, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

Es decir, la probabilidad de que la media muestral se aleje de la media teórica por más de un ϵ se va a cero conforme el número de muestras n crece.

- **Ley fuerte de los grandes números**: Esta versión más estricta de la ley garantiza que la media muestral no solo se aproxima al valor esperado en probabilidad, sino que converge casi seguro a la media teórica a medida que el número de muestras tiende al infinito. Es decir, el promedio de los resultados de un gran número de experimentos convergerá al valor esperado con probabilidad 1.

Matemáticamente, si X_1, X_2, X_3,…son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valor esperado μ, entonces:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1$$

Esto significa que casi siempre, cuando se toma un número suficientemente grande de muestras, la media muestral se acercará al valor esperado.

Ejemplo:

Imaginemos que lanzamos una moneda justa repetidamente. La probabilidad de obtener cara es P(cara)=0.5. Si lanzamos la moneda una vez, podemos obtener cara o cruz, y la media de los resultados podría no ser exactamente 0.5. Pero si lanzamos la moneda muchas veces, la proporción de caras observadas se acercará cada vez más a 0.5.

- Con pocas repeticiones: Si lanzamos la moneda solo 5 veces, es posible que obtengamos 4 caras y 1 cruz. En este caso, la media observada de los lanzamientos es 4/5=0.8, que no coincide con la probabilidad teórica de 0.5.

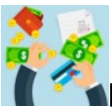
- Con muchas repeticiones: Si lanzamos la moneda 1,000 veces, podemos obtener una proporción de caras mucho más cercana a 0.5, por ejemplo, 500 caras y 500 cruces, lo que nos da una media de 500/1000=0.5= (0.5/1000) *500=0.5, que es muy cercana a la probabilidad teórica.

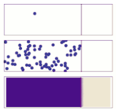
A medida que realizamos más lanzamientos, la media se estabiliza y se aproxima a la probabilidad esperada.

Aplicaciones de la Ley de los Números Grandes:

 **Estadísticas y Muestreo:** En estadística, la Ley de los Números Grandes es fundamental para el muestreo aleatorio. Nos asegura que, si tomamos una muestra suficientemente grande de una población, la media de la muestra será una buena aproximación de la media de la población.

 **Juegos de Azar:** En los juegos de azar, como el lanzamiento de una moneda, la ley explica por qué, al largo plazo, las probabilidades se equilibran. A pesar de que los resultados de los primeros lanzamientos puedan ser impredecibles, con suficientes repeticiones se alcanzará la probabilidad esperada.

**Economía y Finanzas:** En finanzas, la ley se aplica en la predicción de promedios de rendimientos en una cartera de inversión a lo largo del tiempo. A medida que se aumentan las inversiones o se extiende el horizonte temporal, los rendimientos promedio se estabilizan y se acercan a la media teórica.



Físicas y Ciencias Naturales: En la física, cuando se estudian fenómenos aleatorios como el comportamiento de partículas a gran escala, la Ley de los Números Grandes es crucial para predecir los resultados promedio de grandes sistemas o eventos.

La Ley de los Números Grandes es esencial porque brinda una base matemática sólida para confiar en las medias de los experimentos a largo plazo. Sin esta ley, la observación de eventos aleatorios podría parecer totalmente caótica e impredecible. Gracias a ella, sabemos que, aunque el resultado de una serie de experimentos individuales puede ser incierto o azaroso, en grandes cantidades los resultados se estabilizan y pueden ser descritos de manera precisa utilizando modelos probabilísticos.

Referencias:

Feller, W. (1968) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1 (3rd ed.). EUA. Wiley.

Ross, S. (2009) Introduction to Probability Models. EUA. Academic Press.

Grimmett, G. R., & Stirzaker, D. (2001). Probability and Random Processes. EUA. Oxford University Press.