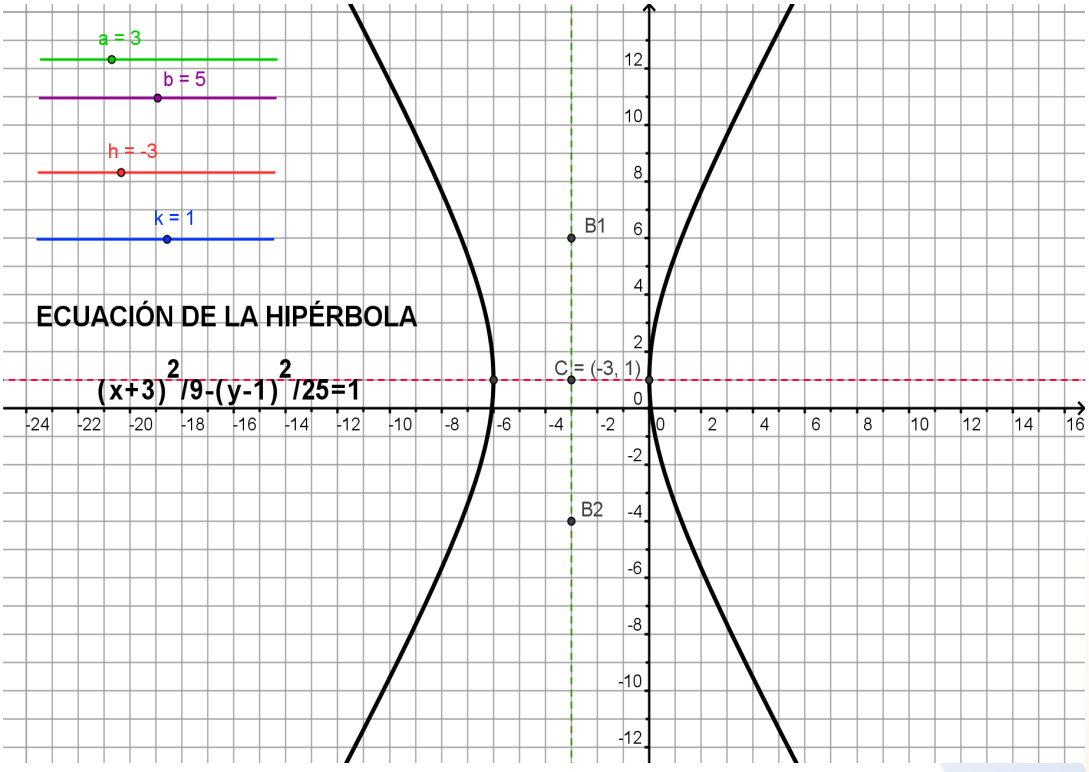
# ECUACIÓN ORDINARIA-ESTÁNDAR

¿Qué pasa cuando el centro no está en el origen?, ¿y además son verticales u horizontales?

En este caso decimos igual que en la circunferencia y en la elipse, que cuando el centro no está en el origen le llamamos a las coordenadas de este como $C(h,k)$. Veamos algunos casos.

**Ejemplo 1**

Analizar la gráfica de la hipérbola con $C(-3,1)$, $a=3$ y $b=5$



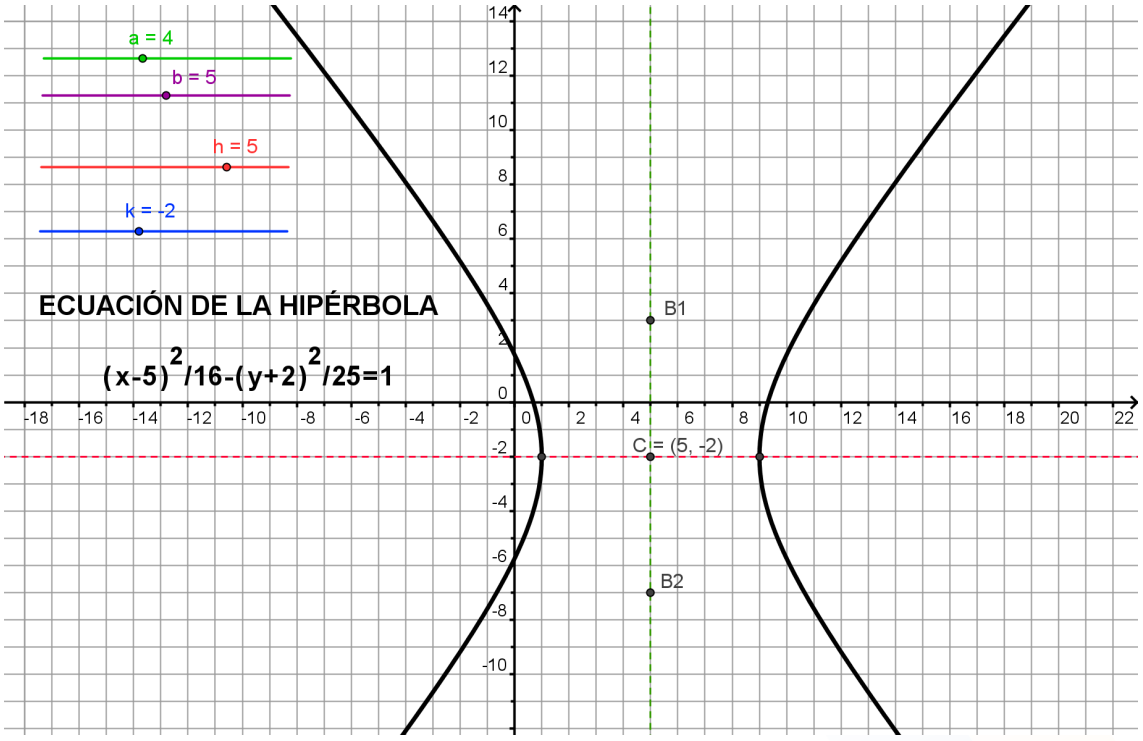

Las coordenadas de sus elementos son:

$a = 3, b = 5, C(-3, 1), V_1(0, 1), V_2(-6, 1), B_1(-3, 6), B_2(-3, -4)$ . Eje mayor en el eje horizontal y la ecuación que la define:

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

**Ejemplo 2**

Analizar la gráfica de la elipse con $C(5, -2), a = 4$ y $b = 5$




Las coordenadas de sus elementos son:

$a = 4, b = 5, C(5, -2), V1(1, -2), V2(9, -2), B1(5, 3), B2(5, -7)$ . Eje mayor en el eje vertical y la ecuación que la define:

$$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

Podemos ver que sucede lo mismo que para cuando el centro está en el origen, es decir, la ecuación con $C\ (h,k)$ queda:

Horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Las ecuaciones de las asíntotas en este caso son:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

Será positiva la recta que está inclinada a la derecha y negativa la que está inclinada a la izquierda.

Vertical:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

Las asíntotas están dadas por:

$$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$$

Igual que el anterior caso, el signo indica hacia dónde está inclinada la recta.

En general, podemos decir que cuando la hipérbola está con centro fuera del origen $(h,k)$:

- Si es horizontal, la $a^2$ estará como denominador de la "$x-h$" y la $b^2$ como denominador de la "$y\ -k$".
- Si es vertical, la $a^2$ estará como denominador de la "$y-k$" y la $b^2$ como denominador de la "$x-h$".
- Siempre se iguala a uno.
- El signo de la abscisa y de la ordenada cambian al insertarse en la ecuación.

## Ecuación ordinaria estándar

Ya que conocemos cuáles son los elementos que definen a la hipérbola, vamos a graficar y obtenerlos cuando se dan algunos de ellos, o bien cuando nos dan la ecuación.

## Ejemplo 1

a) $a = 4, b = 3, C(0,0)$, vertical.

## Solución

- Calculamos $c$, con

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (4)^2 + (3)^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

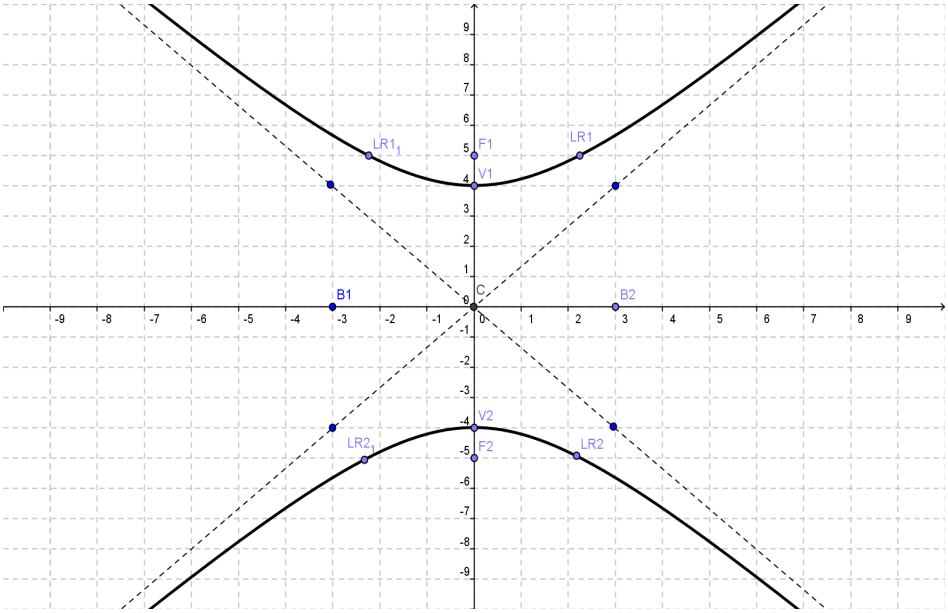
$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

- Ubicamos el centro en el origen.
- Como es horizontal, medimos $4$ unidades hacia arriba y hacia abajo del centro y marcamos los vértices.
- Medimos $3$ unidades hacia la derecha y $3$ hacia la izquierda del centro para los valores de $B_1$ y $B_2$.
- Medimos el valor de $c = 5$ hacia arriba y abajo del centro, que corresponde a los focos.
- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, $\overline{LR} = \frac{2(9)}{4}$ y obtenemos $\overline{LR} = \frac{18}{4}$.

- Ubicamos la mitad de esa medida $\left(\frac{9}{4}\right)$ hacia la derecha e izquierda del foco.
- Unimos los puntos en dos curvas.
- Obtenemos la ecuación cuando el centro está en el origen y es vertical.

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$$




- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la hipérbola.

Coordenadas de los elementos:

$$C(0,0)$$

$$V_1(0,4), V_2(0,-4)$$

$$F_1(0,5), F_2(0,-5)$$

$$B_1(3,0), B_2(-3,0)$$

$$\overline{LR}\left(\frac{9}{4},5\right),\left(\frac{9}{4},-5\right),\left(-\frac{9}{4},5\right),\left(-\frac{9}{4},-5\right)$$

Asíntotas:

$$y - 0 = \pm\frac{4}{3}(x - 0)$$

$$y = \pm\frac{4}{3}x$$

b) La hipérbola está dada por la ecuación:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

**Solución**

Si analizamos la ecuación podemos ver que:

- A la $x^2$ y a la $y^2$ no se les suma ni resta ningún número, por lo que deducimos que el centro está en el origen.
- En la ecuación aparece primero la "$x^2$", lo que indica que es horizontal.
- La $a = \sqrt{36}$ y $b = \sqrt{64}$, es decir, $a = 6$ y $b = 8$.
- Calculamos c con $c^2 = a^2 + b^2$, y obtenemos

$$c^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$c^2 = 100$$

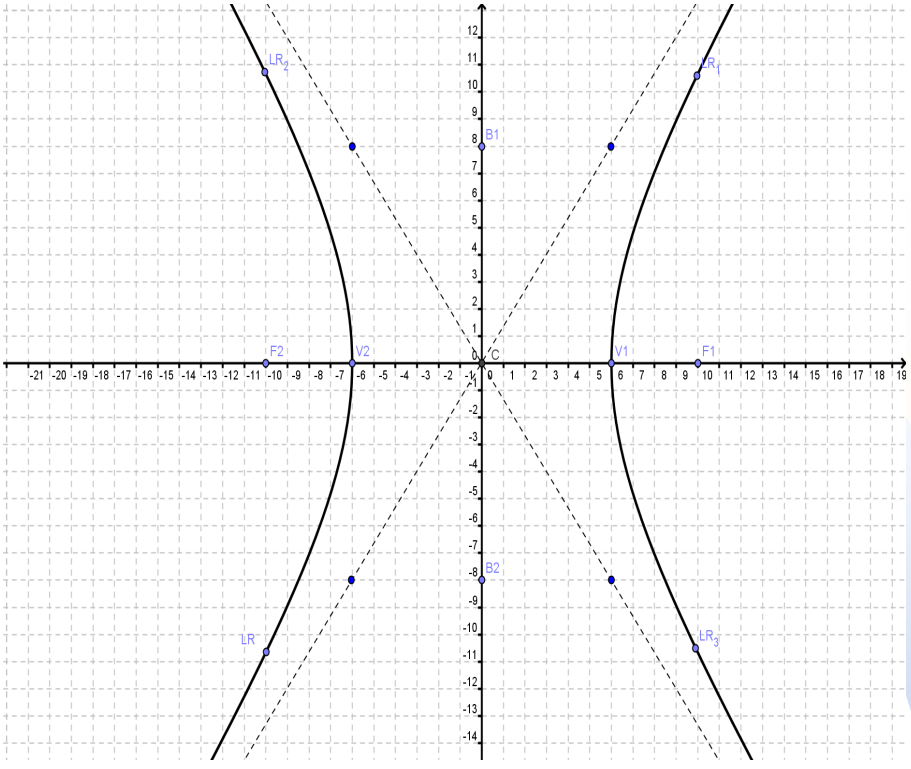
$$c = \sqrt{100}$$

$$c = 10$$

- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, y obtenemos $\overline{LR} = \frac{64}{3}$, aproximadamente $21.33$.
- Ubicamos la mitad de esa medida $\frac{32}{3} = 10.66$ hacia arriba y hacia debajo de los focos.

Gráfica:

- En el plano ubicamos el centro en el origen.
- Medimos del centro hacia los lados $6$ unidades, que corresponden al valor de "$a$" (recordemos que es horizontal).
- Medimos hacia arriba y abajo del centro $8$ unidades, que corresponden al valor de "$b$".
- Marcamos hacia los lados $10$ unidades para los focos, que corresponden al valor de "$c$".
- Unimos lo puntos para las dos curvas que forman la hipérbola.
- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la hipérbola.



Coordenadas de los elementos:

$$C(0,0)$$

$$V_1(6,0), V_2(-6,0)$$

$$F_1(10,0), F_2(-10,0)$$

$$B_1(0,8), B_2(0,-8)$$

$$\overline{LR}\left(10,\frac{32}{3}\right),\left(10,-\frac{32}{3}\right),\left(-10,\frac{32}{3}\right),\left(-10,-\frac{32}{3}\right)$$

Asíntotas:

$$y = \pm\frac{8}{6}x$$

Simplificando:

$$y = \pm\frac{4}{3}x$$

c) $C(-4,5)$, distancia entre los focos $\overline{F_1F_2} = 12$ y $e = 2$, horizontal.

**Solución**

- Como el centro está fuera del origen y es horizontal, la ecuación que se aplica es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- La longitud entre los focos es $12$, por lo que la mitad corresponde al valor de $c = 6$.
- Como la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, despejamos $a = \frac{c}{e}$, sustituyendo obtenemos $a = \frac{6}{2}$, $a = 3$.
- Con $a = 3$ y $c = 6$, sustituimos en:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (6)^2 - (3)^2$$

$$b^2 = 36 - 9$$

$$b^2 = 27$$

$$b = \sqrt{27}$$

La longitud del lado recto está dada por: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

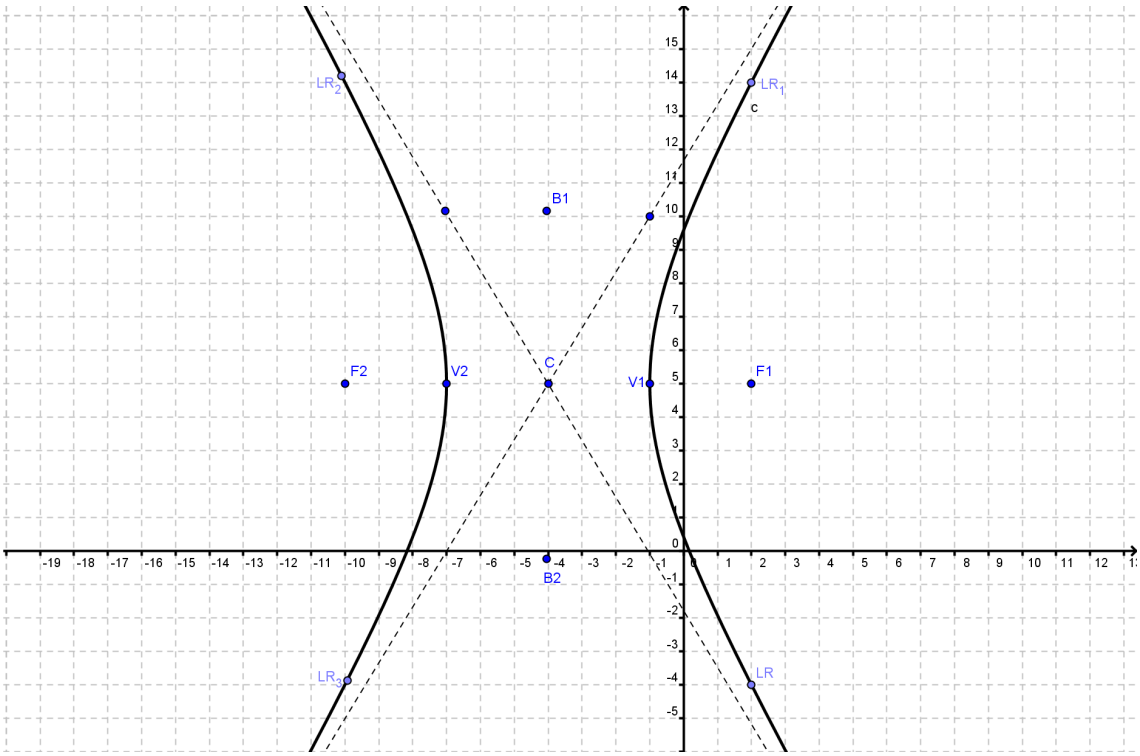
$$\overline{LR} = \frac{2\left(\sqrt{27}\right)^2}{3} = 18$$

La mitad del lado recto es $\frac{18}{2} = 9$

Gráfica

- Ubicamos el centro en $(-4, 5)$.
- Ubicamos los vértices hacia los lados del centro midiendo $3$ unidades a cada lado del centro.

- Los focos se ubican marcando $6$ unidades a cada lado del centro.
- El eje menor se mide del centro hacia arriba $\sqrt{27}$ y hacia abajo.
- Para la longitud del lado recto se miden $9$ unidades hacia arriba y hacia abajo de los focos.
- Se obtiene la ecuación de la hipérbola.
- Se obtienen las coordenadas de los elementos de la hipérbola.




Ecuación: $C(-4,5), a=3, b=\sqrt{27}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x+4)^2}{(3)^2}-\frac{(y-5)^2}{\left(\sqrt{27}\right)^2}=1$$

$$\frac{(x+4)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{27}=1$$

Coordenadas de los elementos:

- $C(-4,5)$
- $V_1(-1,5), V_2(-7,5)$
- $F_1(2,5), F_2(-10,5)$
- $B_1\left(-4,5+\sqrt{27}\right),\ B_2\left(-4,5-\sqrt{27}\right)$
- $\overline{LR}(2,14),(2,-4),(-10,14),(-10,-4)$

**Referencias:**


Torres, C. G. (2020). Secciones cónicas: Una introducción práctica. Editorial Universitaria Moderna.

Vega, F. A., & López, P. T. (2022). Usos geométricos de la hipérbola en sistemas de posicionamiento global. Matemáticas y Tecnología Aplicada, 10(2), 75-88.