ECUACIÓN ORDINARIA ESTÁNDAR

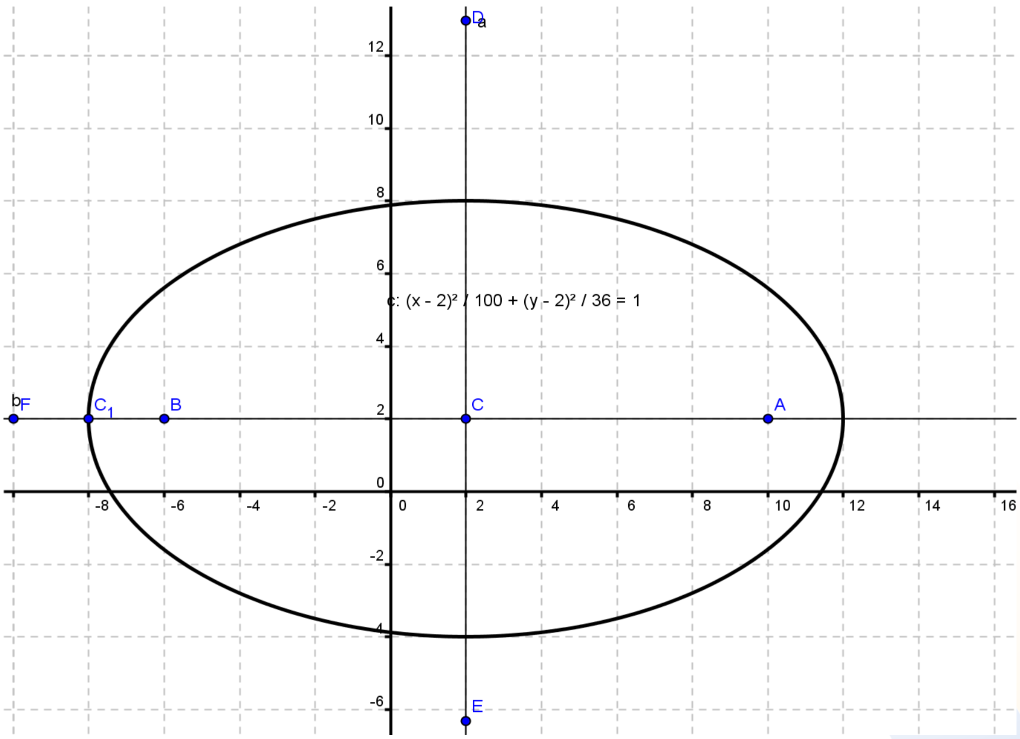
Hasta aquí hemos aprendido la ecuación de la elipse, vertical y horizontal, con centro en el origen, pero ¿qué pasa cuando el centro no está en el origen?

En este caso decimos igual que en la circunferencia, que cuando el centro no está en el origen le llamamos a las coordenadas de este como $C(h, k)$. Veamos algunos casos:

Ejemplo 1

Solución

Analizar la gráfica de la elipse con $C(2,2), a = 10$ y $b = 6$:



Las coordenadas de sus elementos son:

$$a = 10;\ b = 6;\ C(2,2);\ F_1(-6,2);\ F_2(10,2);\ B_1(2,8);\ B_2(2,-4)$$

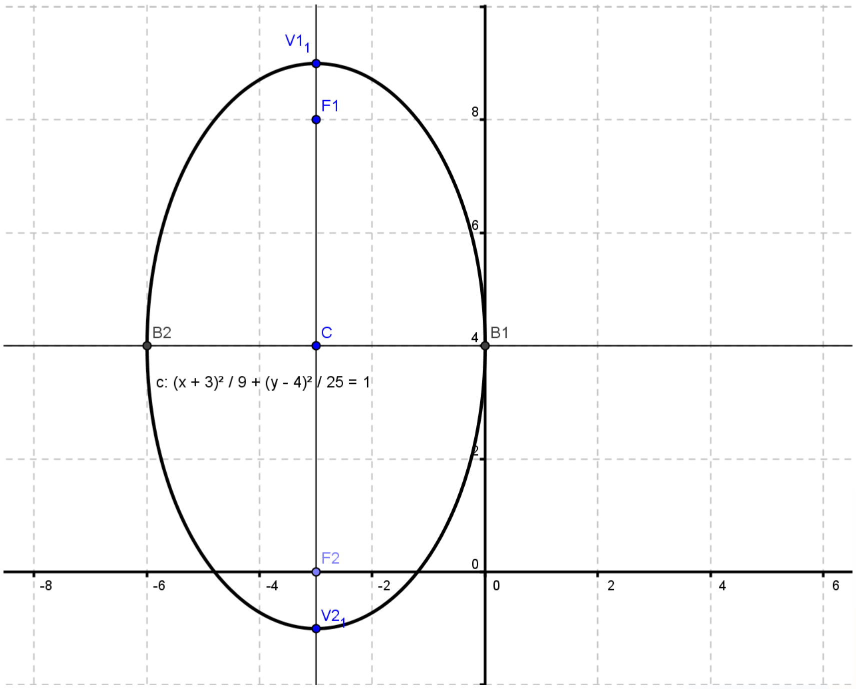
Eje mayor en el eje horizontal y ecuación que la define:

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

Ejemplo 2

Solución

Analizar la gráfica de la elipse con $C(-3,4), a=5$ y $b=3$:



Las coordenadas de sus elementos son:

$$a=5;\ b=3;\ \ C(-3,4);\ F_1(-3,8);\ F_2(0,-1);\ B_1(4,0);\ B_2(-6,4)$$

Eje mayor en el eje vertical y ecuación que la define:

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$$

Podemos ver que sucede lo mismo que para cuando el centro está en el origen, es decir, **<u>la ecuación con $\boldsymbol{C\ (h,k)}$ queda:</u>**

Horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Vertical:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Podemos decir que cuando la elipse está con centro fuera del origen (h,k):

- Si es horizontal, la a^2 estará como denominador de la "$x-h$", y la b^2 como denominador de la "$y\ -k$".
- Si es vertical, la a^2 estará como denominador de la "$y-k$", y la b^2 como denominador de la "$x-h$".
- Siempre se iguala a uno.
- El signo de la abscisa y de la ordenada cambian al insertarse en la ecuación.

Ya que conocemos cuáles son los elementos que definen a la elipse, vamos a graficar y obtenerlos cuando se dan algunos de ellos, o bien cuando nos dan la ecuación.

Ejemplo 1

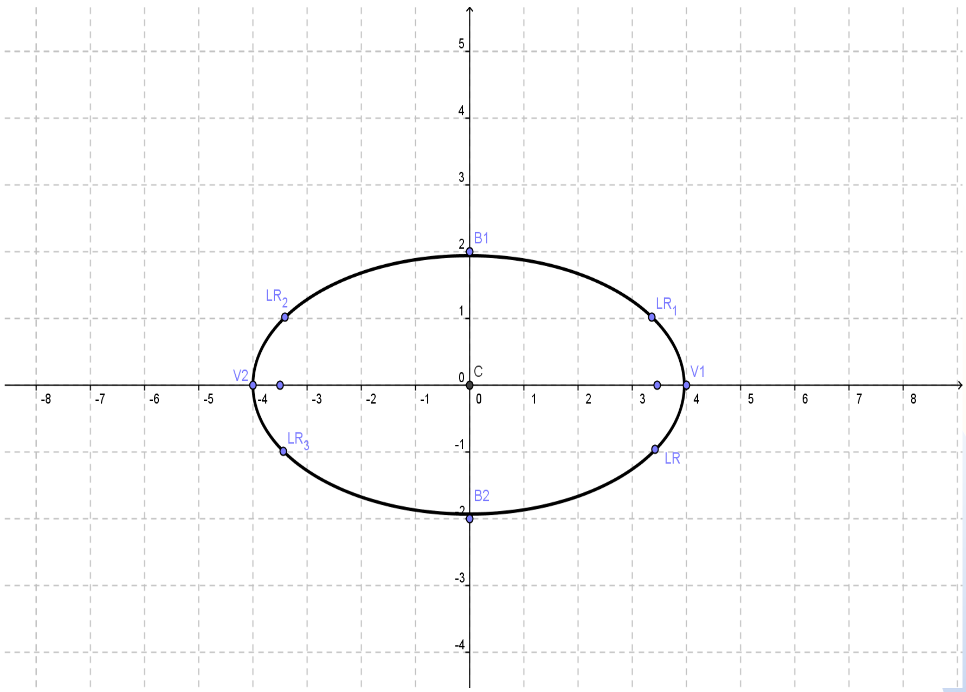
a) $a=4, b=2, C(0,0)$, horizontal.

Solución

- Calculamos c, con $c^2 = a^2 - b^2$.
- Ubicamos el centro en el origen.
- Como es horizontal, medimos 4 unidades a la derecha del centro y cuatro unidades a la izquierda.
- Medimos 2 unidades hacia arriba del centro y dos hacia abajo para el eje menor.
- Medimos el valor de $c = \sqrt{12}$, que es aproximadamente 3.46 hacia la derecha y hacia la izquierda del centro que corresponde a los focos.
- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, y obtenemos $\overline{LR} \ = \ 2$.
- Ubicamos la mitad de esa medida (1) hacia arriba y hacia abajo del foco.
- Unimos los puntos $V_1, \overline{LR}, B_1, \overline{LR}, V_2, \overline{LR}, \ B_2, \overline{LR}, V_1$, con una curva.
- Obtenemos la ecuación cuando el centro está en el origen y el horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la elipse.



La ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Coordenadas de los elementos:

$$C(0,0)$$
$$V_1(4,0), V_2(-4,0)$$
$$F_1(\sqrt{12},0), F_2(\sqrt{12},0)$$
$$B_1(0,2), B_2(0,-2)$$
$$\overline{LR}(\sqrt{12},1),(\sqrt{12},-1),(-\sqrt{12},1),(-\sqrt{12},-1)$$

b) La elipse está dada por la ecuación: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

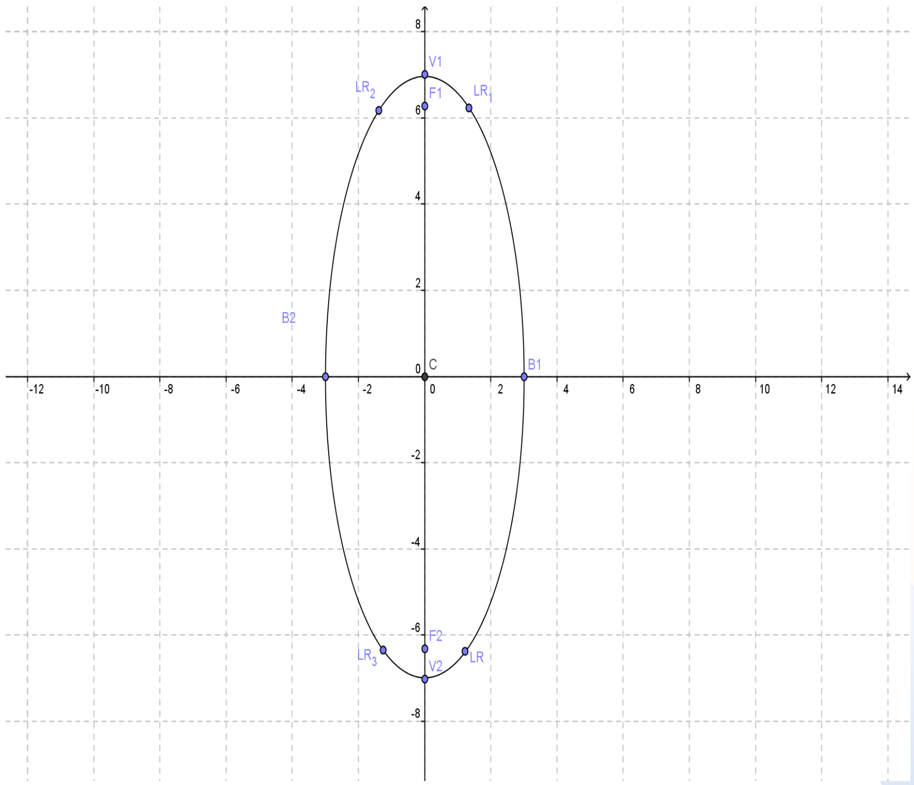
Solución

Si analizamos la ecuación podemos ver que:

- A la x^2 y a la y^2 no se les suma ni resta ningún número, por lo que deducimos que el centro está en el origen.
- El denominador mayor está debajo de y^2, entonces es vertical.
- La "a" siempre es mayor que la "b", entonces $a=\sqrt{49}$ y $b=\sqrt{9}$, es decir, $a=7$ y $b=3$.
- Calculamos c con $c^2=a^2-b^2$, y obtenemos

$$c^2=(7)^2-(3)^2$$
$$c^2=40$$
$$c=\sqrt{40}\approx 6.3$$

- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, y obtenemos $\overline{LR} = \frac{18}{7} \approx 2.57$.
- Ubicamos la mitad de esa medida $\left(\frac{9}{7} \approx 1.28\right)$ hacia arriba y hacia abajo del foco.
- En el plano ubicamos el centro en el origen.
- Medimos del centro hacia arriba y hacia abajo el valor de "a" (recordemos que es vertical).
- Medimos hacia los lados del centro el valor de "b"
- Marcamos hacia arriba y hacia abajo el valor de "c".
- Ubicamos los lados rectos marcando hacia arriba y hacia debajo de "c", que son los focos.
- Unimos los puntos con una curva.
- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la elipse.



- La ecuación:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Coordenadas de los elementos:

$$C(0,0)$$

$$V_1(0,9), V_2(0,-9)$$

$$F_1(0,\sqrt{40}), F_2(0,-\sqrt{40})$$

$$B_1(3,0), B_2(-3,0)$$

$$\overline{LR}\left(\frac{9}{7},\sqrt{40}\right),\left(\frac{9}{7},-\sqrt{40}\right),\left(-\frac{9}{7},\sqrt{40}\right),\left(-\frac{9}{7},-\sqrt{40}\right)$$

c) $C(-3,-1)$ longitud del eje mayor igual a 20 y $e = 0.5$, horizontal.

Solución

- Como el centro está fuera del origen y es horizontal, la ecuación que se aplica es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- La longitud del eje mayor corresponde a 2 a, por lo tanto

$$2a = 20$$

$$a = 10$$

- Como la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, despejamos $c = (e)(a)$, sustituyendo obtenemos

$$c = (0.5)(10)$$

$$c = 5$$

- Con $a = 10$ y $c = 5$, sustituimos en

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = (10)^2 - (5)^2$$
$$b^2 = 100 - 25$$
$$b^2 = 75$$
$$b = \sqrt{75}$$

- La longitud del lado recto está dada por

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{75}\right)^2}{10} = 15$$

La mitad del lado recto es $\frac{15}{2} = 7.5$

Gráfica:

- Ubicamos el centro en $(-3, -1)$.
- Ubicamos los vértices hacia los lados del centro midiendo 10 unidades a cada lado del centro.
- Los focos se ubican marcando 5 unidades a cada lado del centro.
- El eje menor se mide del centro hacia arriba $\sqrt{75}$ y hacia abajo.
- Para la longitud del lado recto se mide $\frac{15}{2}$ a ambos lados de los focos.
- Se obtiene la ecuación de la elipse.
- Se obtienen las coordenadas de los elementos de la elipse.

Ecuación: $C(-3,-1)$ $a = 10,\ b = \sqrt{75}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{(10)^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{75}\right)^2} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{75} = 1$$

Coordenadas de los elementos:

- $C(-3,-1)$
- $V_1(7,-1), V_2(-13,-1)$
- $F_1(2,-1), F_2\left(-8,-\sqrt{40}\right)$
- $B_1\left(-3,-1+\sqrt{75}\right), B_2\left(-3,-1-\sqrt{75}\right)\sqrt{75}$
- LR (2,13/2), (- 8, 13/2), (2,-17/2), (- 8, -17/2)
- $\overline{LR}\left(2,\frac{13}{2}\right),\left(-8,\ \frac{13}{2}\right),\left(2,\ \frac{17}{2}\right),\left(-8,\ \frac{17}{2}\right)$

Referencias:

Gómez, R., & López, S. (2017). La elipse en el plano cartesiano: Una perspectiva algebraica. Revista de Matemáticas Aplicadas, 14(1), 28-45.

Ramírez, A. J. (2020). Geometría analítica avanzada. Editorial Universitaria.