ECUACIÓN GENERAL

Cuando conocemos la ecuación de la hipérbola de la forma ordinaria, se pueden desarrollar los binomios y obtener la ecuación de la forma general, que es:

$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0$ para la hipérbola horizontal

$Ay^2 - Bx^2 + Dx + Ey + F = 0$ para la hipérbola vertical

En la cual podemos ver que cuando la curva es horizontal empieza con Ax^2 , y cuando es vertical empieza con Ay^2, además A y B deben ser positiva la primera y negativa la segunda.

Ejemplo 1

Dadas las ecuaciones de las hipérbolas de la forma ordinaria, obtén las ecuaciones de la forma general.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 16 y al 25, este sería el 400:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$400\left[\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1\right]$$

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

$$25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$$

Esta es la ecuación de la hipérbola de la forma general, en la cual $A = 25, B = 9, D = 0, E = 0$ y $F = -225$.

b) $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 100 y al 25, este sería el 100:

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$100\left[\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = 1\right]$$

$$y^2 - 4x^2 = 100$$

$$y^2 - 4x^2 - 100 = 0$$

Esta es la ecuación de la hipérbola de la forma general, en la cual $A = 1, B = -4, D = 0, E = 0$ y $F = -100$.

c) $\frac{(x+1)^2}{81} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Solución

Buscamos un número que divida al 81 y al 9, que sería 81, enseguida multiplicamos toda la ecuación por este número, desarrollamos los binomios, después multiplicamos y simplificamos igualando a cero la ecuación resultante.

$$\frac{(x+1)^2}{81} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$81\left[\frac{(x+1)^2}{81} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right]$$

$$(x+1)^2 - 9(y-3)^2 = 81$$

$$(x^2+2x+1) - 9(y^2-6y+9) = 81$$

$$x^2+2x+1-9y^2+54y-81-81 = 0$$

$$x^2-9y^2+2x+54y-161 = 0$$

Esta es la ecuación de la hipérbola de la forma general, en la cual $A=1, B=-9, D=2, E=54$ y $F=-161$.

d) $\frac{(y-6)^2}{49} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

Solución

Buscamos un número que divida al 49 y al 16, que sería 784, enseguida aplicamos el mismo procedimiento que para el ejemplo anterior.

$$\frac{(y-6)^2}{49} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

$$784\left[\frac{(y-6)^2}{49} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1\right]$$

$$16(y-6)^2 - 49(x-3)^2 = 784$$

$$16(y^2 - 12y + 36) - 49(x^2 - 6x + 9)^2 = 784$$

$$16y^2 - 192y + 576 - 49x^2 + 294x - 441 - 784 = 0$$
$$16y^2 - 49x^2 + 294x - 192y - 649 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 16, B = -49, D = 294, E = -192$ y $F = -649$.

Ahora, ¿qué pasa si lo que tenemos es la ecuación de la forma general y deseamos saber cuál es la ecuación de la forma ordinaria?

El procedimiento es agrupar lo términos que contienen la misma variable, factorizar y obtenemos la ecuación pedida.

Para factorizar lo hacemos completando el trinomio cuadrado perfecto agregando a la ecuación la mitad de "D" elevada al cuadrado, así como la de "E", y agregando estas mismas cantidades del lado derecho de la ecuación para que no se altere la misma.

Si los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero antes de completar el trinomio, es necesario factorizar los términos Ax^2, Dx y Cy^2, Ey.

Ejemplo 1

Dadas las ecuaciones de la forma general, obtén la ecuación de la forma ordinaria.

a) $36x^2 - 64y^2 - 216x + 256y - 2236 = 0$

Solución

$$36x^2 - 64y^2 - 216x + 256y - 2236 = 0$$

$$36x^2 - 64y^2 - 216x + 256y = 2236$$

$$36(x^2 - 6x) - 64(y^2 - 4y) = 2236$$

$$36(x^2 - 6x + 3^2) - 64(y^2 - 4y + 2^2) = 2236 + 36(3^2) - 64(2^2)$$

$$36(x^2 - 6x + 9) - 64(y^2 - 4y + 4) = 2236 + 324 - 256$$

$$36(x-3)^2 - 64(y-2)^2 = 2304$$

$$\frac{36(x-3)^2 - 64(y-2)^2}{2304} = \frac{2304}{2304}$$

$$\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

b) $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$

Solución

En este caso la ecuación no tiene el término Dx y Ey, por lo que deducimos que se trata de una elipse con centro en el origen, así que el procedimiento se reduce pues solo hay que pasar el término F al segundo miembro de la ecuación y dividir toda la ecuación entre este número para que quede igualada a 1.

$$9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$$

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

$$\frac{9y^2 - 16x^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

c) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$

Solución

Este ejemplo es igual que el del inciso (a), por lo que se resuelve igual.

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$$

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y = 68$$

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) = 68$$

$$4(x^2 - 2x + 1^2) - 9(y^2 - 4y + 2^2) = 68 + 4(1^2) - 9(2^2)$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = 68 + 4 - 36$$

$$4(x-1)^2 - 9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{4(x-1)^2 - 9(y-2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

d) $9x^2 - 81y^2 - 729 = 0$

Solución

Como la ecuación no tiene Dx ni Ey, se procede igual que el ejemplo del inciso (b).

$$9x^2 - 81y^2 - 729 = 0$$

$$9x^2 - 81y^2 = 729$$

$$\frac{9x^2 - 81y^2}{729} = \frac{729}{729}$$

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Referencias:

Torres, C. G. (2020). Secciones cónicas: Una introducción práctica. Editorial Universitaria Moderna

Vega, F. A., & López, P. T. (2022). Usos geométricos de la hipérbola en sistemas de posicionamiento global. Matemáticas y Tecnología Aplicada, 10(2), 75-88.