ECUACIÓN GENERAL

Cuando conocemos la ecuación de la elipse de la forma ordinaria, al trabajarla algebraicamente podemos llegar a la ecuación de la forma general, que es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En la cual A y C deben ser del mismo signo (los dos positivos o los dos negativos), además $A \neq C$ porque si $A = C$, entonces el lugar geométrico es una circunferencia.

Ejemplos

Dadas las ecuaciones de las elipses de la forma ordinaria, obtén las ecuaciones de la forma general.

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 9 y al 25, este sería el 225

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$225\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1\right]$$

$$225x^2 + 9y^2x^2 = 225$$

$$225x^2 + 9y^2x^2 - 225 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 25, C = 9, D = 0, E = 0, F = -225$

b) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución

Primero obtenemos un número que divida al 49 y al4, este sería el 196

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$196\left[\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$$

$$4x^2 + 49y^2 = 196$$

$$4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 4, C = 49, D = 0, E = 0, F = -196$

c) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Solución

Buscamos un número que divida al 16 y al 9 , que sería 144, enseguida multiplicamos toda la ecuación por este número, desarrollamos los binomios, después multiplicamos y simplificamos igualando a cero la ecuación resultante.

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$$\left[144\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1\right]$$

$$9(x-4)^2+16(y+1)^2=144$$

$$9(x^2-8x+16)+16(y^2+2y+1)=144$$

$$9x^2-72x+144+16y^2+32y+16-144=0$$

$$9x^2+16y^2-72x+32y+16=0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A=9, C=16, D=-72, E=32, F=16$

d) $\frac{(x+6)^2}{4}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$

Solución

Buscamos un número que divida al 4 y al 16, que sería 16, enseguida aplicamos el mismo procedimiento que para el ejemplo anterior.

$$\frac{(x+6)^2}{4}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

$$16\left[\frac{(x+6)^2}{4}+\frac{(y+5)^2}{16}=1\right]$$

$$4(x+6)^2+(y+5)^2=16$$

$$4(x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 10y + 25) = 16$$

$$4x^2 + 48x + 144 + y^2 + 10y + 25 - 16 = 0$$

$$4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$$

Esta es la ecuación de la elipse de la forma general, en la cual $A = 4, C = 1, D = 48, E = 10, F = 153$

Ahora, ¿qué pasa si lo que tenemos es la ecuación de la forma general y deseamos saber cuál es la ecuación de la forma ordinaria?

El procedimiento es agrupar los términos que contienen la misma variable, factorizar y obtenemos la ecuación pedida.

Para factorizar, lo hacemos completando el trinomio cuadrado perfecto agregando a la ecuación la mitad de "D" elevada al cuadrado así como la de "E", y agregando estas mismas cantidades del lado derecho de la ecuación para que no se altere la misma.

Si los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero antes de completar el trinomio, es necesario factorizar los términos Ax^2, Dx y Cy^2, Ey .

Ejemplo 1

Dadas las ecuaciones de la forma general, obtén la ecuación de la forma ordinaria.

a) $4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$

Solución

$$4x^2 + y^2 + 48x + 10y + 153 = 0$$

$$4x^2 + 48x + y^2 + 10y = -153$$

$$4(x^2 + 12x + (6)^2) + (y^2 + 10y + (5)^2) = -153 + 4((6)^2) + (5)^2$$

$$4(x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 10y + 25) = -153 + 144 + 25$$

$$4(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

$$\frac{4(x + 6)^2 + (y + 5)^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\frac{(x + 6)^2}{4} + \frac{(y + 5)^2}{16} = 1$$

Que si observas, es la misma ecuación del ejemplo (d) del ejercicio anterior.

b) $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$

Solución

En este caso la ecuación no tiene el término Dx y Ey , por lo que deducimos que se trata de una elipse con centro en el origen, así que el procedimiento se reduce pues solo hay que pasar el término F al segundo miembro de la ecuación y dividir toda la ecuación entre este número para que quede igualada a 1.

$$25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$$

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

$$\frac{25x^2 + 4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

c) $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

Solución

Este ejemplo es igual que el del inciso (a), por lo que se resuelve igual.

$$3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$$

$$3x^2 - 24x + 2y^2 + 12y = -60$$

$$3(x^2 - 8x) + 2(y^2 + 6y) = -60$$

$$3(x^2 - 8x + (4)^2) + 2(y^2 + 6y + (3)^2) = -60 + 3(4)^2 + 2(3)^2$$

$$3(x^2 - 8x + 16) + 2(y^2 + 6y + 9) = -60 + 48 + 18$$

$$3(x-4)^2 + 2(y+3)^2 = 6$$

$$\frac{3(x-4)^2 + 2(y+3)^2}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$$

d) $9x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solución

Como la ecuación no tiene Dx ni Ey , se procede igual que el ejemplo del inciso (b).

$$9x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$9x^2 + y^2 = 9$$

$$\frac{9x^2 + y^2}{9} = \frac{9}{9}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Referencias:

Gómez, R., & López, S. (2017). La elipse en el plano cartesiano: Una perspectiva algebraica. Revista de Matemáticas Aplicadas, 14(1), 28-45.

Ramírez, A. J. (2020). Geometría analítica avanzada. Editorial Universitaria.