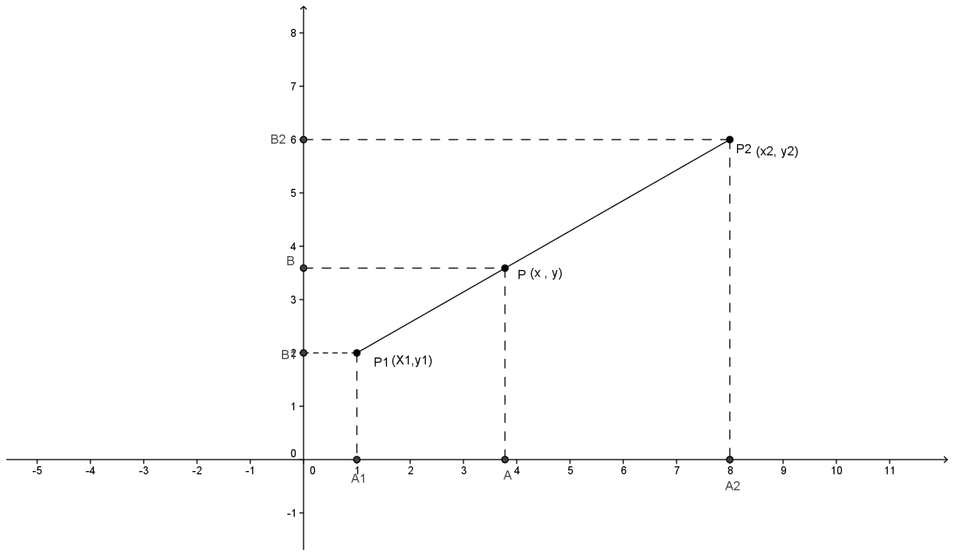
EJEMPLOS: (DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA)

Observa la siguiente gráfica:



Si el segmento formado por los puntos $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$ lo cortamos en un punto $P(x, y)$, la proporción (r) en la que se encuentran los segmentos formados es:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Por el Teorema de Tales, que estudiaste en matemáticas II, sabemos que varias rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en cualquier transversal que las corte. Con las paralelas P_1A_1, PA, P_2A_2 se puede establecer la siguiente proporción, la cual determina la abscisa del punto P.

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{A_1A}{AA_2}$$

Como

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}, \qquad \mathrm{A_1A = x - x_1}; \quad \mathrm{AA_2 = x_2 - x}$$

Tenemos que:

$$r = \frac{\mathrm{x - x_1}}{\mathrm{x_2 - x}}$$

$$r(\mathrm{x_2 - x}) = \mathrm{x - x_1}$$

$$r\mathrm{x_2 - rx = x - x_1}$$

Reacomodando términos:

$$\mathrm{x_1} + r\mathrm{x_2} = \mathrm{x - rx}$$

Factorizando el 2° miembro de la ecuación:

$$\mathrm{x_1} + r\mathrm{x_2} = \mathrm{x(1 - r)}$$

Despejando para "x"

$$x = \frac{\mathrm{x_1} + r\mathrm{x_2}}{\mathrm{1+r}} \text{ para } r \neq -1$$

Realiza el mismo procedimiento para obtener el valor correspondiente de la abscisa (y) para el punto P. De este procedimiento obtendrás:

$$y = \frac{\mathrm{y} + r\mathrm{y}}{\mathrm{1+r}} \text{ para } r \neq -1$$

Ejemplo 1

Calcula el valor de la razón dada "r" en los siguientes segmentos:

SOLUCIÓN

$r = \frac{AD}{DB}$	$r = \frac{2}{2} = 1$
$r = \frac{AC}{CB}$	$r = \frac{1}{3}$
$r = \frac{AE}{EB}$	$r = \frac{3}{1} = 3$

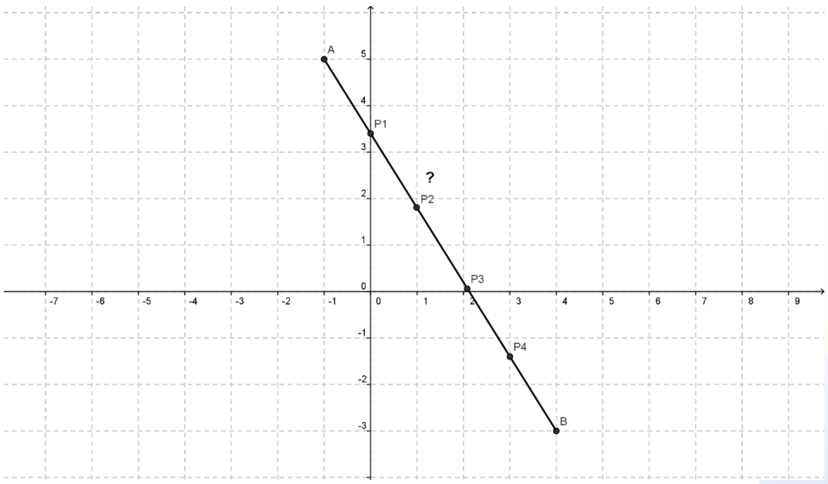
Ejemplo 2

Calcula las coordenadas del punto que divide al segmento AB en una proporción de $2\colon 3$.

$A(-1,5)$ y $B(3,-4)$. $r = \frac{2}{3}$

SOLUCIÓN

Gráfica:



Si observamos en la gráfica el punto que necesitamos calcular es el P_2. Los datos que tenemos son:

$$r = \frac{2}{3} \qquad A(-1,5) \qquad B(4,-3)$$

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{(-1) + \left(\frac{2}{3}\right)4}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)} \qquad y = \frac{(5) + \left(\frac{2}{3}\right)(-3)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$x = \frac{(-1) + \left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{5}{3}} \qquad y = \frac{5 - 2}{\frac{5}{3}}$$

$$x = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \qquad y = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}}$$

$$x = 1 \qquad y = \frac{9}{5}$$

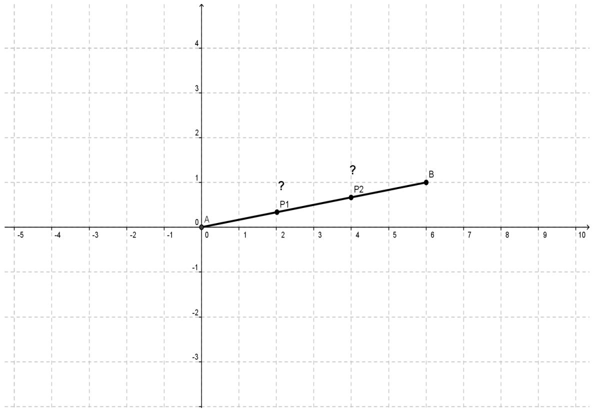
Por lo que el punto que buscamos es $P_2\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$; si observamos en la gráfica queda en el lugar que está ubicado

Ejemplo 3

Un joven con unos patines desea subir una calle que muestra cierta inclinación. La inclinación de la calle se puede idealizar en un plano cartesiano como el segmento de recta AB que aparece en la gráfica siguiente.

Se quiere determinar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales, pues en estos puntos estarán sus amigos alentándolo para que termine con éxito su recorrido, conociendo las coordenadas de $A(0,0)$ y de $B(6,1)$.

SOLUCIÓN



Primero debemos encontrar el valor de “r” para los puntos indicados:

Para el punto P_1:

$$r = \frac{1}{2} \qquad A(0,0) \qquad B(6,1)$$

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{\mathrm{x}_1 + r\mathrm{x}_2}{1 + \mathrm{r}} \qquad y = \frac{\mathrm{y}_1 + r\mathrm{y}_2}{1 + \mathrm{r}}$$

$$x = \frac{(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(6)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} \qquad y = \frac{(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$x = \frac{0 + 3}{\frac{3}{2}} \qquad y = \frac{0 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{6}{3} \qquad y = 1$$

$$x = 2$$

Por lo que el punto P_1 estará ubicado en $P_1(2,1)$

Para el P_2:

$$r = \frac{2}{1} = 2$$

$$A(0,0) \qquad A(x_1, y_1)$$

$$B(6,1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{\mathrm{x}_1 + r\mathrm{x}_2}{1+\mathrm{r}} \qquad y = \frac{\mathrm{y}_1 + r\mathrm{y}_2}{1+\mathrm{r}}$$

$$x = \frac{(0)+(2)(6)}{1+2} \qquad y = \frac{(0)+(2)(1)}{1+(2)}$$

$$x = \frac{0+12}{3} \qquad y = \frac{0+2}{3}$$

$$x = \frac{12}{3} \qquad y = \frac{2}{3}$$

$$x = 4$$

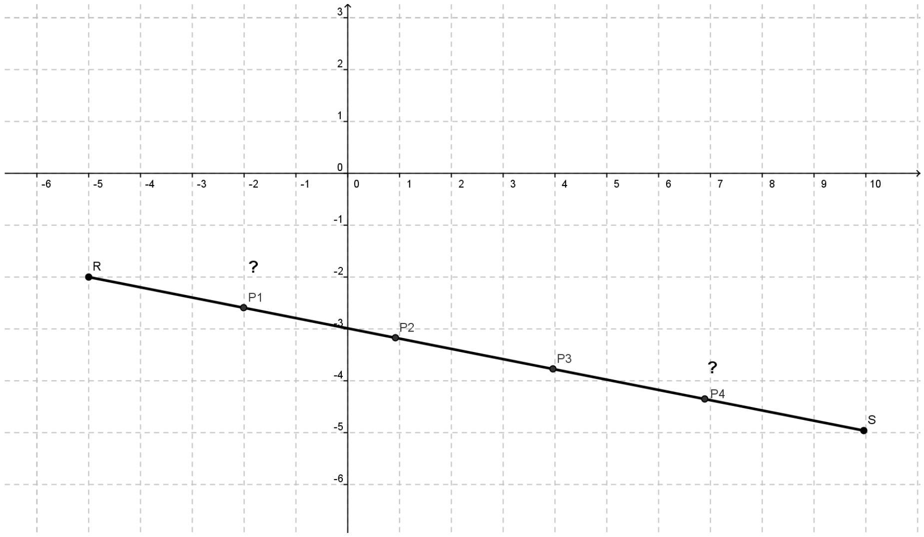
Por lo que el punto P_2 estará ubicado en $P_2\left(4, \frac{2}{3}\right)$

<u>Ejemplo 4</u>

Carmen debe sembrar 6 arbolitos en un surco. Los árboles deben estar separados por distancias iguales. Si uno de los extremos del surco es el punto $R(-5,-2)$ y el otro extremo es $S(10,-5)$, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde deben colocarse los 2 árboles $(P_1 \; y \; P_4)$ más próximos a R y a S? Nota: en ambos extremos se colocará un arbolito.

SOLUCIÓN

Graficamos para darnos una idea de donde se ubicará cada uno de los arbolitos.



Primero debemos encontrar el valor de "r" para los puntos indicados:

Para el punto P_1:

$$r = \frac{1}{4} \qquad A(-5,-2) \qquad B(10,-5)$$

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{(-5) + \left(\frac{1}{4}\right)(10)}{1 + \frac{1}{4}} \qquad y = \frac{(-2) + \left(\frac{1}{4}\right)(-5)}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$x = \frac{-5 + \frac{5}{2}}{\frac{5}{4}}$$

$$y = \frac{-2 + \frac{5}{4}}{\frac{5}{4}}$$

$$x = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{4}}$$

$$y = \frac{\frac{-13}{4}}{\frac{5}{4}}$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{-13}{5}$$

$$x = -2$$

Por lo que el punto P_1 estará ubicado en P_1(-2, -13/5)

Para el punto P_4:

$$r = \frac{4}{1} = 4$$

$$A(-5, -2)$$

$$A(x_1, y_1)$$

$$B(10, -5)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{\mathrm{x}_1 + r\mathrm{x}_2}{1 + \mathrm{r}}$$

$$y = \frac{\mathrm{y}_1 + r\mathrm{y}_2}{1 + \mathrm{r}}$$

$$x = \frac{(-5) + (4)(10)}{1 + 4}$$

$$y = \frac{(-2) + (4)(-5)}{1 + (4)}$$

$$x = \frac{-5 + 40}{5}$$

$$y = \frac{-2 - 20}{5}$$

$$x = \frac{-2 - 20}{5}$$

$$y = \frac{-22}{5}$$

$$x = \frac{35}{5}$$

$$x = 7$$

Por lo que el punto P_4 estará ubicado en $P_4\left(7, \frac{-22}{5}\right)$. Lo puedes verificar en la gráfica.

Referencias:

Beskin, N. M. (1975). Dividing a segment in a given ratio. Mir Publishers.

Katz, V. J. (2009). A history of mathematics: An introduction (3rd. ed.). Addison-Wesley.

Stewart, J. (2015). Calculus: Early transcendentals (8th. ed.). Cengage Learning.