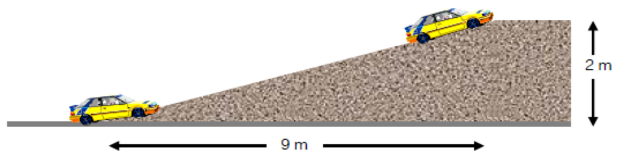
EJEMPLOS (ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA)

Con la experiencia que se tiene hasta ahora en la gráfica de rectas, se puede visualizar el ángulo de inclinación de las mismas, el cual se define como el ángulo (α) que se forma a partir del eje de las abscisas y la recta, en sentido contrario a las manecillas del reloj. El ángulo de inclinación de una recta varía entre $0°$ y $90°$. En el primer y cuarto cuadrante será positivo y en el segundo y tercero será negativo ya que se mide en sentido de las manecillas del reloj.

La pendiente (m) de una recta es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, también se le conoce como la razón de cambio en la posición de un punto en el plano cartesiano; para visualizar y comprender mejor esta definición se tomará el siguiente ejemplo.

<u>**Ejemplo 1**</u>

Un automóvil se mueve por una carretera inclinada, como se ve en la figura, ¿cuál es la pendiente y el ángulo de inclinación de la carretera?



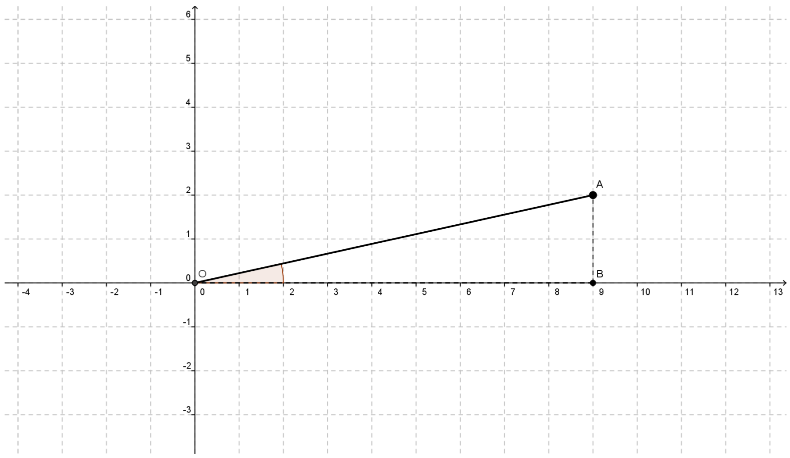
SOLUCIÓN

Como la pendiente es la razón entre los desplazamientos, esta se expresa de la siguiente forma: Pendiente $= \frac{2}{9}$ la pendiente se identifica con la letra "m" por lo que

$$m = \frac{2}{9}$$

Este valor nos indica la razón de cambio en la posición del auto, es decir, que por cada 2 metros que el auto avanza verticalmente, lo hace al mismo tiempo 9 metros en forma horizontal.

Si ubicamos estos puntos en un plano cartesiano:



Podemos observar que si queremos calcular el ángulo de inclinación de la recta OA con respecto a la horizontal (α), el segmento forma un triángulo rectángulo cuyos catetos son OB y AB. Recordando un poco funciones trigonométricas de matemáticas II, el ángulo α lo podemos calcular con la función tangente:

$$\tan\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{OB}$$

Como la razón $\frac{AB}{OB}$ es la razón entre los desplazamientos y corresponde a la pendiente, podemos deducir que:

$$\tan \alpha = m$$

Si le asignamos las coordenadas al punto $O(x_1, y_1)$ y al punto $A(x_2, y_2)$, entonces $B(x_2, y_1)$, tenemos que la pendiente es:

$$m = \frac{AB}{OB}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así podemos calcular del desplazamiento del auto que la $m = \frac{2}{9}$ y el ángulo de inclinación es:

$$\tan \alpha = m$$

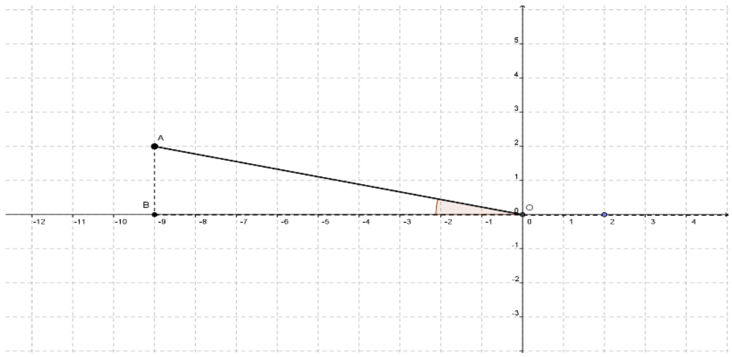
$$\tan \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$\alpha = 12.5288°$$

$$\alpha = 12°\ 31´\ 43.71´´$$

Si el auto en lugar de desplazarse hacia la derecha la pendiente del camino estuviera hacia la izquierda, la ubicación quedaría:



La pendiente será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - 0}{-9 - 0} = \frac{2}{-9}$$

Es decir, por cada dos unidades que avanza hacia arriba, se desplaza 9 unidades hacia la izquierda. El ángulo es:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{-9}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-9}\right)$$

$$\alpha = 12.5288°$$

$$\alpha = 12°\,31'\,43.71''$$

Que corresponde al mismo valor que en el caso anterior solamente que es negativo, ya que se mide en sentido de las manecillas del reloj y el anterior es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

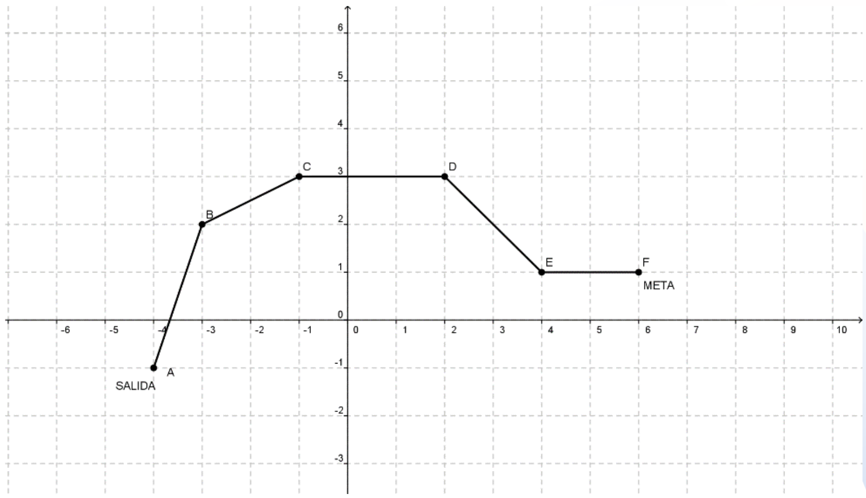
Ejemplo 2

El recorrido de una ruta ciclista es el siguiente: salida $A(-4,-1)$, $B(-3,2)$, $C(-1,3)$, $D(2,3)$, $E(4,1)$ y la meta $F(6,1)$.

1) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente positiva?
2) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente negativa?
3) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente cero?
4) ¿Cuál fue el tramo con el valor mayor de la pendiente y que por lo tanto requirió más fuerza en las piernas para pedalear?

SOLUCIÓN

Graficando:



Si observamos la gráfica podemos contestar algunas de las preguntas:

1) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente positiva? AB y BC
2) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente negativa? DE
3) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente cero? CD y EF
4) ¿Cuál fue el tramo con el valor mayor de la pendiente y que por lo tanto requirió más fuerza en las piernas para pedalear? AB

Haciendo el cálculo analítico para confirmar las respuestas anteriores tenemos:

$A(-4,-1), B(-3,2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{2-(-1)}{-3-(-4)} = \frac{3}{1} = 3$$

$B(-3,2), C(-1,3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{BC} = \frac{3-2}{-1-(-3)} = \frac{1}{2}$$

$C(-1,3), D(2,3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{CD} = \frac{3-3}{2-(-1)} = \frac{0}{3} = 0$$

$D(2,3), E(4,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{DE} = \frac{1-3}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$E(4,1), F(6,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{EF} = \frac{1-1}{6-4} = \frac{0}{2} = 0$$

En resumen: $m_{AB} = 3$, $m_{BC} = \frac{1}{2}$, $m_{CD} = 0$, $m_{DE} = -1$, $m_{EF} = 0$

Regresando a las respuestas dadas:

1) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente positiva?
   - ✓ $AB = 3, BC = \frac{1}{2}$

2) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente negativa?
   - ✓ $DE = -1$

3) ¿Cuáles tramos de la ruta tienen pendiente cero?
   - ✓ $CD = 0$ y $EF = 0$

4) ¿Cuál fue el tramo con el valor mayor de la pendiente y que por lo tanto requirió más fuerza en las piernas para pedalear?
   - ✓ $AB = 3$

NOTA: Te puedes dar cuenta que los segmentos inclinados a la derecha tienen pendiente positiva, los inclinados a la izquierda tienen pendiente negativa y los horizontales tienen pendiente nula o igual a cero. También puedes observar que gráficamente podemos dar respuestas acertadas, pero el método analítico es más exacto.

Ejemplo 3

Del ejemplo anterior, calcula los ángulos de inclinación de cada tramo que recorrió el ciclista.

SOLUCIÓN

Datos:

$m_{AB} = 3, m_{BC} = \frac{1}{2}, m_{CD} = 0, m_{DE} = -1, m_{EF} = 0$

Ángulo AB:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = 3$$

$$\alpha = \tan^{-1}(3)$$

$$\alpha = 71.5650°$$

$$\alpha = 71°\,33'\,54.18''$$

Ángulo BC:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 26.5660°$$

$$\alpha = 26°\,33'\,54.18''$$

Ángulo CD:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = 0$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0)$$

$$\alpha = 0°$$

$$\alpha = 0°\,00'\,00''$$

Ángulo DE:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = -1$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-1)$$

$$\alpha = 45°$$

$$\alpha = 45° \, 00' \, 00''$$

Ángulo EF:

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \alpha = 0$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0)$$

$$\alpha = 0°$$

$$\alpha = 0° \, 00' \, 00''$$

Referencias:

Geometría Analítica (s.f.). Condiciones de paralelismo y perpendicularidad en rectas. Recuperado de: https://matematix.org/condiciones-de-paralelismo-y-perpendicularidad/

Universidad Autónoma Metropolitana. (s.f.). El concepto natural del paralelismo y la perpendicularidad. Recuperado de: http://campusvirtual.cua.uam.mx/pdfs/paea/18o/tm/tema7_cont_b.pdf

Universidad Nacional de Colombia (2020). La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/78753/42692623.2020.pdf?sequence=