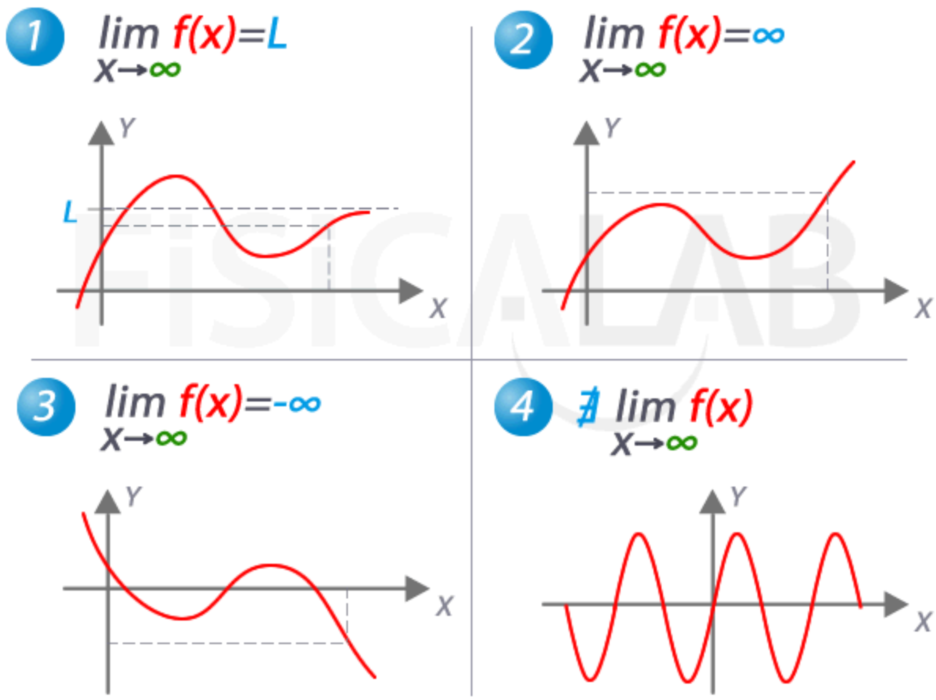
LÍMITES DONDE INTERVIENE EL INFINITO

De manera intuitiva, el **límite de una función real** en el infinito (o en el menos infinito) es el valor al que se aproxima la función (es decir, su coordenada *y*) a medida que la coordenada *x* se hace "más y más grande".

No confundas el límite de una función en el infinito, con que el valor de un límite sea infinito (decimos límite infinito). En el primer caso es la x lo que se hace infinitamente grande. En el segundo, son las ramas de la función las que se alejan indefinidamente, de ahí que en este último caso se hable de ramas infinitas.



https://www.fisicalab.com/apartado/concepto-limite-funcion-en-infinito

Límite cuando x tiende a ∞

En la imagen, los 4 posibles comportamientos de la función cuando el valor de x crece indefinidamente (decimos, cuando x tiende a ∞). En 1, la función se aproxima *a* L, por tanto, ese es el valor del límite. En 2, la función se va al infinito y en 3 se va a menos infinito. En 4, no existe el límite ya que la función es periódica y no se aproxima a ningún valor concreto.

Aproximaciones sucesivas al infinito

En este caso, y estrictamente hablando, el infinito no es un valor, sino más bien una idea

¿Qué significa, por tanto, que $\boldsymbol{x} \to \infty$?

Veámoslo con un ejemplo concreto:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

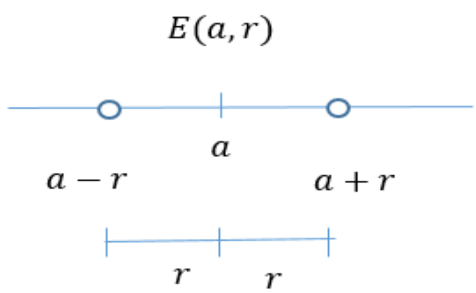
Le daremos valores a x

x	$f(x)$
10	1/10=0.1
100	1/100=0.01
1000	1/1000=0.001
100000	1/100000=0.00001

Como podemos ver, a medida que nos acercamos al infinito, el valor de la función se aproxima a cero. Es por eso que decimos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$; sin embargo, esto no significa que $\frac{1}{\infty} = 0$, en realidad no sabemos cuánto vale esta expresión. Vemos de nuevo que el límite es un concepto dinámico, que tiene que ver con el aproximarse a ciertos valores, frente al valor de una función en un punto, que es un concepto estático.

Nota: De manera análoga, podemos estudiar lo que le sucede a la función cuando la x se hace muy negativa (diremos muy pequeña, aunque el lenguaje puede engañarte: ten presente que no nos referimos a que se aproxime a 0).

x	$f(x)$
-10	-1/10=-0.1
-100	-1/100=-0.01
-1000	-1/1000=-0.001
-100000	-1/100000=-0.00001



Por lo tanto, a medida que nos acercamos al infinito, la función también se aproxima a cero.

Valor Finito

El límite de una función cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a infinito es $\boldsymbol{L}$ si podemos conseguir que $\boldsymbol{f(x)}$ esté tan próximo a $\boldsymbol{L}$ como queramos, dándole a $\boldsymbol{x}$ valores suficientemente grandes.

Para hacer la definición formal, nos valemos de la idea de entorno. Recuerda que un entorno de centro $\boldsymbol{a}$ y radio $\boldsymbol{r}$ es un intervalo abierto de valores próximos a dicho número real y que lo contiene, es decir, $E(a,r) = (a-r, a+r)$, que también puede expresarse como aquellos valores x que cumplen $|x-a| < r$.

Entorno de centro *a* y radio *r*

Representación gráfica de un entorno con centro a y radio r. Es un intervalo abierto en el que la distancia entre el centro a y los extremos es r.

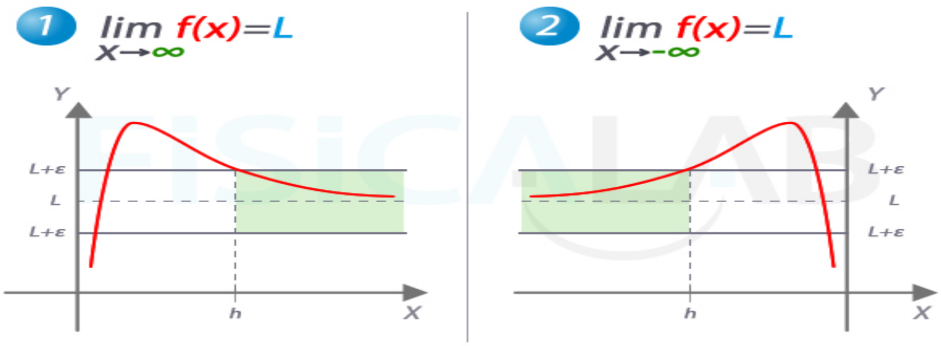
Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es $\boldsymbol{L}$ si para cualquier entorno de centro $\boldsymbol{L}$ y radio $\boldsymbol{\varepsilon}$, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real $\boldsymbol{h}$, tan grande como sea necesario, a partir del cual las imágenes de $x > h$ pertenecen a dicho entorno.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists h \in \mathbb{R} | si\ x > h \Longrightarrow f(x) - L| < \epsilon$$

De manera análoga, podemos decir que el límite de una función cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a menos infinito es $\boldsymbol{L}$ si podemos conseguir que $\boldsymbol{f(x)}$ esté tan próximo a L como queramos, dándole a $\boldsymbol{x}$ valores suficientemente pequeños.

Decimos que el **límite de una función** $f(x)$ **cuando** $\boldsymbol{x}$ **tiende a** $-\infty$ es $\boldsymbol{L}$ si para cualquier entorno de centro $\boldsymbol{L}$ y radio $\boldsymbol{\varepsilon}$, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real $\boldsymbol{h}$, tan pequeño como sea necesario, hasta el cual las imágenes de $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{h}$ pertenecen a dicho entorno:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists h \in \mathbb{R} | si\ x < h \Longrightarrow f(x) - L| < \epsilon$$



Valor finito en límite cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$

Elementos de la definición cuando x tiende a ∞ (a la izquierda) o a $-\infty$ (a la derecha). En el primer caso, a partir de h, se cumple la condición de que las imágenes están siempre en el entorno de L (esto es lo que significa que $|f(x) - L| < \mathcal{E}$). Como la función se aproxima a L a medida que x aumenta, aunque fijemos una ε muy pequeña, siempre se puede encontrar un h que cumpla la condición señalada. En el segundo caso, la condición de que las imágenes están siempre en el entorno de L se cumple **hasta** h.

En ambos casos, decimos que la recta $\boldsymbol{y = L}$ es una asíntota horizontal de la función.

Algunos autores hacen una diferenciación entre +∞ y ∞, de manera que ∞ englobaría al -∞ y al +∞. Así, si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Consideremos la siguiente función:

Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{7x^3 + 3x - 1}$$

En este ejemplo no podemos realizar la sustitución directa, dado que el símbolo infinito no es un número real y para nosotros no tienen sentido expresiones como $(\infty)^3$ o $3(\infty)$. Para resolver este tipo de problemas nos auxiliaremos del teorema anterior, realizando operaciones algebraicas que nos permitan obtener expresiones del tipo $\frac{1}{x^n}$. Para este ejemplo dividimos numerador y denominador entre x^3(variable de mayor exponente).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{7x^3 + 3x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{x^3}}{\frac{7x^3 + 3x - 1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^3}}{7+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 8\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + 3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}}{7+3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}} = \frac{3-8(0)+3(0)}{7+3(0)-0} = \frac{3}{7}$$

Por lo tanto, podemos observar los siguientes teoremas:

Si n es cualquier número entero positivo, entonces:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & si\ n\ es\ par \\ -\infty & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+5} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x+5}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}} = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

En este ejemplo dividiremos también el numerador y el denominador entre x^2, que es la potencia más grande

Podríamos decir que el límite es $+\infty$, dado que el numerador es (+) y el denominador se aproxima a cero, a través de valores positivos.

Es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+5} = +\infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x+\infty} \frac{3x - x^2}{4x + 5}$$

$$\lim_{x+\infty} \frac{\frac{3x - x^2}{x^2}}{\frac{4x + 5}{x^2}} = \lim_{x+\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

En este ejemplo dividiremos también el numerador y el denominador entre x^2, que es la potencia más grande

$$\lim_{x+\infty} \frac{\frac{3}{\infty^2} - 1}{\frac{4}{\infty} + \frac{5}{\infty^2}}$$

$$= \frac{0 - 1}{0 + 0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Observemos que el numerador es negativo y el denominador se aproxima a cero a través de valores positivos (+/-)=-1, por lo que:

$$\lim_{x+\infty} \frac{3x - x^2}{4x + 5} = -\infty$$

Referencias:

Silva Ochoa, J. M., & Lazo, A. (1990). Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. Limusa.

Fisicalab (s.f.). Límite de una función en el infinito. Recuperado de: https://www.fisicalab.com/apartado/concepto-limite-funcion-en-infinito